

Спин и орбитальный момент – это одно и то же? Версия 2¹.

Р. И. Храпко*

Московский авиационный институт, Москва, 125993

Рассматриваются существующие ныне противоположные концепции классического спина электромагнитных волн. Подробный анализ механических напряжений в среде и электромагнитном поле показывает справедливость концепции распределенного спина, который пропорционален плотности энергии и описывается тензором спина. Демонстрируются простые расчеты механического воздействия на среду при поглощении спина и указываются экспериментальные следствия. Дополнительно рассмотрен ряд вопросов. В частности, смысл процедуры Белинфанте-Розенфельда и преобразование Гамблета на фоне излучения вращающегося диполя, которое рассчитывается с помощью тензора спина или квантового подхода Фейнмана.

PACS number: 75.10.Hk

Содержание

0. Введение

1. Тензорная плотность распределённых силовых напряжений

2. Механические напряжения электромагнитного поля

3. Тензорная плотность спина

4. Попытки моделирования спина моментом импульса

4.1. Одномерная попытка

4.2. Двумерная попытка

4.3. Аналогия между моментом импульса и магнитным моментом

4.4. Еще одна неудачная апелляция к магнитному полю

4.5. Сингулярные волчки

5. Поглощение спина

5.1. При поглощении однородной плотности спина возникает антисимметричный тензор напряжений

5.2. Предварительные рассуждения

5.3. Расчет тензора напряжений при распределенном спиновом моменте силы

6. Практическая реализация антисимметричного тензора напряжений

7. Потoki импульса и энергии, сопутствующие потоку спина

8. Использование тензора энергии-импульса

9. Тензор спина электродинамики и его использование

10. Заключение

11. Материалы для дальнейшего чтения

11.1. Локализация момента силы пучка света круговой поляризации.

11.2. Двухкомпонентная мишень

11.3. Тензор спина классической электродинамики

11.4. Излучение вращающегося диполя

11.5. Использование криволинейных координат и «законы сохранения»

12. Благодарности

Список литературы

¹ Первая версия этой статьи была направлена в ЖЭТФ, Известия вузов Физика, УФН в 1999 году и отклонена. Экземпляр, направленный в ЖЭТФ, представлен по адресу <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=91&module=files>. Рецензии УФН 1999 года представлены по адресу <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=108&module=files>. Чудовищная рецензия УФН 2013 года представлена по адресу <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=110&module=files>

* Email: khrapko_ri@hotmail.com, <http://khrapkori.wmsite.ru>

Некоторые обозначения

p обозначает давление, $p_{\lambda}^i = T_{\lambda}^{ii}$ [Н.сек/м³] импульс единицы объёма среды, \mathbf{P} вектор электрической поляризации среды, P мощность, т.е. поток энергии. Вектор Пойнтинга $[\mathbf{E}\mathbf{H}]$ не имеет специального обозначения. S [Дж.сек] обозначает спин, а s [Дж.сек/м³] объемную плотность спина. W обозначает энергию, а w объемную плотность энергии.

0. Введение

На протяжении более ста лет в физике параллельно существуют противоположные представления о моменте импульса электромагнитной волны круговой поляризации.

Большая (первая) группа специалистов считает, что плоская (неограниченная) волна не содержит никакого момента импульса. Гайтлер [1] объясняет это мнение так (сохранены обозначения автора):

В теории Максвелла вектор Пойнтинга \mathbf{S} (делённый на c^2) интерпретируется как плотность импульса поля. Поэтому момент количества движения относительно данной точки O (или данной оси) можно определить как $\mathbf{M} = \int [\mathbf{r}\mathbf{S}]d\tau / c^2$, где \mathbf{r} - расстояние от точки O . Плоская волна, распространяющаяся вдоль оси z (и не ограниченная в направлениях x , y) не имеет момента количества движения относительно этой оси, так как вектор \mathbf{S} направлен по оси z и, следовательно, $[\mathbf{r}\mathbf{S}]_z = 0$.

Такое мнение выразили Эренфест² [2], Шапочников [4], рассматривавший бесконечно протяженную плоскую волну (цитирую по [5]), Соколов³ [6], Барабанов⁴ [7]

Следует признать, что для такого мнения имеется не только указанное математическое, но и определенное психологическое основание. Действительно, в плоской волне круговой поляризации ничего не крутится. Она представляет собой винтовую поверхность, составленную из векторов \mathbf{E} и \mathbf{B} (вернее, она состоит из элементов такой поверхности), которая движется **поступательно**. На рисунке 1 изображено, как смещается спираль за небольшой промежуток времени. **Неверно рассматривать такую волну, как поток волчков или вращающихся пуль.**

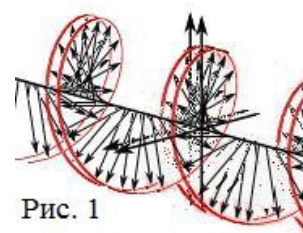


Рис. 1
Поступательное смещение спирали

Существенно, однако, что специалисты первой группы считают, что вообще не корректно рассматривать плоскую неограниченную волну, не содержащую момент импульса; следует рассматривать пучок электромагнитного излучения. И вот пучок электромагнитного излучения, в отличие от плоской волны, **содержит** момент импульса. Гайтлер пишет:

Рассмотрим плоскую волну, отличную от нуля, лишь внутри цилиндра с осью z и распространяющуюся вдоль этой оси. Пусть на стенках цилиндра амплитуда волны обращается в нуль. Тогда можно показать, что граничная область такого волнового пакета вносит конечный вклад в M_z .

Природу пристеночного момента импульса наглядно объясняет Оганян в известной статье «Что есть спин?» [8]:

² “It has been claimed that an infinite plane wave cannot possess angular momentum even if it is circularly polarized” (цитировано по [3])

³ «Оказываются, что плотность потока момента импульса в плоской поляризованной по кругу электромагнитной волне равна нулю (стр. 175, 176)»

⁴ «Поток углового момента плоской кругополяризованной волны вдоль вектора Пойнтинга равен нулю»

В бесконечной плоской волне векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} везде перпендикулярны волновому вектору, а поток энергии везде ему параллелен. Но в волне, имеющей конечные поперечные размеры, каждое из полей \mathbf{E} и \mathbf{B} имеет компоненты, параллельные волновому вектору (силовые линии замкнуты), а поток энергии имеет перпендикулярные ему составляющие. Поэтому результирующий поток энергии имеет вид спирали. Наличие циркулирующего потока энергии предполагает существование момента импульса, направленного вдоль направления распространения волны.

Возникновение этого общепризнанного пристеночного момента импульса подробно анализируют Симмондз и Гуттманн⁵ [9]. Математически объемная плотность пристеночного момента импульса выражается через градиент интенсивности волны

$$j_z = \epsilon_0 [\mathbf{r}[\mathbf{E}\mathbf{B}]]_z = -\frac{\epsilon_0 r}{2\omega} \frac{\partial E_0^2(r)}{\partial r}. \quad (0.1)$$

Эта формула приводится во всех статьях, касающихся данного вопроса (например, [10,11]).

Самым важным моментом является то, что специалисты первой группы признают этот пристеночный момент импульса как СПИН пучка круговой поляризации. Оганян [8]⁶ пишет: «Этот момент импульса и есть спин волны».

Тут, однако, возникает проблема! Ведь спин в волне пропорционален её интенсивности, поскольку спин фотона равен \hbar , а энергия фотона $\hbar\omega$. Поэтому спин должен быть распределен равномерно по всему пучку, как и энергия. А пристеночный момент импульса, признаваемый как спин, расположен при стенке пучка. Так что проблема заключается в том, чтобы объяснить, как происходит выдавливание спина из тела пучка на его стенку. Стандартное решение проблемы иллюстрирует Сопер⁷ [12].

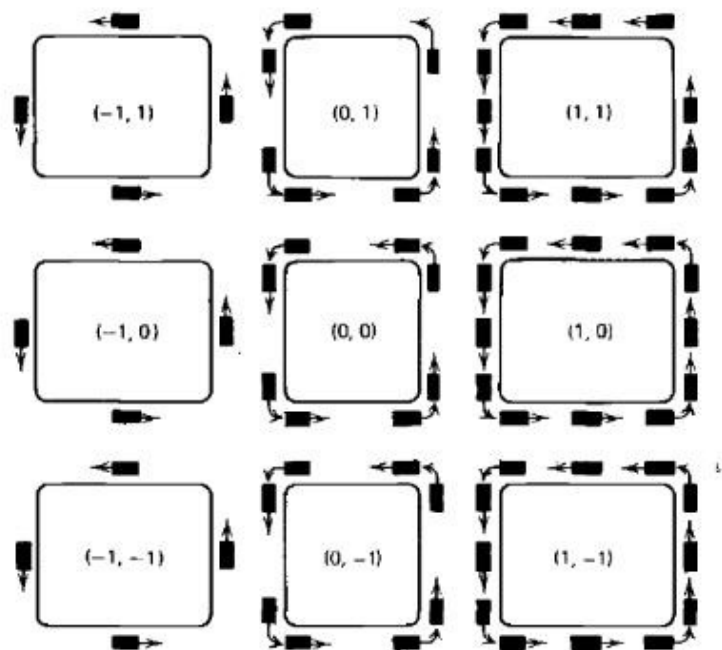


Figure 9.1 Angular momentum of traffic flow in London.

Рис. 2

⁵ The electric and magnetic fields can have a nonzero z -component only within the skin region of this wave. Having z -components within this region implies the possibility of a nonzero z -component of angular momentum within this region

⁶ This angular momentum is the spin of the wave

⁷ Imagine that on a Sunday morning everybody in London drives his car continuously around his block in a counterclockwise direction, as shown in Figure 9.1

Автомобильное (спиновое) движение по улицам между кварталами внутри Лондона самокомпенсируется. Нескомпенсированным оказывается движение на окраине. Это, по мнению специалистов первой группы, и объясняет то, что спин, существующий внутри пучка, проявляет себя как пристеночный момент импульса в соответствии с формулой (0.1).

Мы показываем в разделе 4.2, что такое рассуждение ошибочно. Спин не является моментом линейного импульса. Мы подробно рассматриваем отличие спина от момента импульса. Кроме того, приведенное рассуждение провозглашает существенную нелокальность классической электродинамики: масса-энергия пучка W находится внутри пучка, а его (спиновый) угловой импульс \mathbf{J} находится на поверхности пучка. Они оказываются пространственно разобщены!

Следует также помнить, что спиновый угловой импульс вообще не связан с движением (см. высказывание Хеля в разделе 3).

Мы показываем, что поверхностный момент импульса представляет не спин, а орбитальный момент импульса L , тогда как спин S присутствует в таком пучке **помимо** этого орбитального момента импульса, распределён по всему телу пучка, и **плотность** его пропорциональна плотности энергии точно так, как спин фотона \hbar пропорционален энергии фотона $\hbar\omega$.

Вторая группа специалистов как раз и считает, что электромагнитная волна круговой поляризации содержит угловой импульс вне зависимости от того, рассматривается плоская волна или пучок, причем объемные плотности углового импульса j и энергии w всегда пропорциональны друг другу

$$j = w / \omega. \quad (0.2)$$

Эта группа специалистов просто игнорирует формулу $\mathbf{j} = \epsilon_0 [\mathbf{r}[\mathbf{E}\mathbf{B}]]$.

Мнение этой группы восходит к Садовскому [13] и Пойнтингу⁸ [14]. Фейнман [15, 17-4] объяснил спиновую природу этого углового импульса (см. раздел 7). Специалисты второй группы считают, что в любой электромагнитной волне круговой поляризации существует плотность спина, $\mathbf{j} = \mathbf{s}$.

1. Тензорная плотность распределённых силовых напряжений

Непрерывно распределённые механические **силы** могут действовать внутри какой-нибудь среды или на границе между средами. Это, например, давление, называемое также нормальным механическим **напряжением**, или касательное напряжение. Механические напряжения среды описывается тензорной плотностью силы T_{Λ}^{ij} [Н/м²] (которую, впрочем, мы будем часто называть просто тензором напряжений).

Для написания *плотностей* мы не пользуемся готическим шрифтом, как это обычно делается. Вместо готического шрифта мы отмечаем плотности знаком 'wedge' \wedge . Такое обозначение использовал И.А. Кунин [16] при переводе на русский язык монографии [17]. Однако в отличие от [16], мы ставим знак \wedge на уровне нижних или верхних индексов для плотностей веса +1 или -1 соответственно. Например, элемент объема или элементарная площадка с внешней ориентацией, которые являются плотностями веса -1, обозначаются dV^{\wedge} или da_i^{\wedge} , соответственно.

Для операционного определения плотности T_{Λ}^{ij} следует выделить в среде инфинитезимальную площадку da_i^{\wedge} с внешней ориентацией (**рис.**

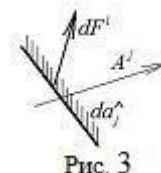


Рис. 3

3). У такой площадки есть задняя и передняя стороны. Направление

⁸ Равенство (0.2) в обозначениях Пойнтинга выглядит так: $G = E\lambda / 2\pi$, где G есть плотность момента силы, возникающего при поглощении волны, а E объемная плотность энергии (наше w).

«вперёд» указывается вектором, который даёт положительную свёртку с площадкой. Например, у площадки $a_i^\wedge = \{1, 0, 0\}$ направление вперёд совпадает с направлением оси x , потому что свёртка с вектором $A^i = \{1, 0, 0\}$ даёт $a_i^\wedge A^i = 1$. Площадка da_i^\wedge локально делит среду на заднюю и переднюю части. Так вот, плотность T_\wedge^{ij} определяет силу, с которой задняя часть среды действует на заднюю сторону площадки da_i^\wedge и через неё на переднюю часть среды, которая заштрихована на рис. 3:

$$dF^i = T_\wedge^{ij} da_j^\wedge. \quad (1.1)$$

В естественном состоянии в обычной среде нет напряжений. Напряжения в упругой среде возникают, когда где-нибудь на границе среды действуют внешние силы. Если дивергенция тензора напряжений равна нулю, $\partial_j T_\wedge^{ij} = 0$, то напряжения являются *сбалансированными*. При таких напряжениях **суммарная** сила, действующая извне на границу $a = \partial V$ любого выделенного объёма V , в том числе и на границу среды, равна нулю:

$$\partial_j T_\wedge^{ij} = 0 \text{ влечет } F_{in}^i = -\oint_{\partial V} T_\wedge^{ij} da_j^\wedge = -\int_V \partial_j T_\wedge^{ij} dV^\wedge = 0, . \quad (1.2)$$

Здесь, в отличие от dF^i из (1.1), использовано обозначение $dF_{in}^i = -T_\wedge^{ij} da_j^\wedge$ для силы, которая действует на граничную площадку da_j^\wedge *внутрь*, то есть в направлении «назад».

Сбалансированные напряжения (1.2) существуют, например, внутри газа, сжатого стенками баллона. Для него $T_\wedge^{ij} = \text{diag}\{p, p, p\} = \text{const}$, где p есть давление. Однако напряжения (сбалансированные) могут существовать и в изолированных телах, т.е. когда на границе, b , вообще нет никаких сил: $dF_b^i = -T_\wedge^{ij}(b) db_i^\wedge = 0$. Это называется «предварительно напряжённые детали».

Отметим, что утверждение (1.2) не справедливо, вообще говоря, в искривлённом пространстве. Там суммарная внешняя сила на границе тела может быть отлична от нуля при сбалансированных внутренних напряжениях. Это означает, что такое тело будет самоускоряться, если его изолировать. Подобная ситуация рассмотрена, в частности, в [18 - 21]. Дело в том, что суммарная внешняя сила, действующая на границе b , получается суммированием сил $dF_b^i = -T_\wedge^{ij}(b) db_i^\wedge$, действующих на элементы границы. А для такого суммирования эти силы нужно перенести в одну общую точку x' . Для этого применяется двухточечная функция, называемая *транслятором* $\Psi_i^{\prime}(x', x)$:

$$F_{in}^i(x') = -\oint_{\partial V} \Psi_i^{\prime} T_\wedge^{ij} da_j^\wedge = -\int_V \nabla_j (\Psi_i^{\prime} T_\wedge^{ij}) dV^\wedge = -\int_V \nabla_j \Psi_i^{\prime} \cdot T_\wedge^{ij} dV^\wedge \quad (1.3)$$

(частная производная, стоящая в (1.2), заменяется здесь ковариантной производной, ввиду неизбежного использования криволинейных координат; специфика использования криволинейных координат обсуждается в разделе **11.5**). Оказывается, что сбалансированные внутренние напряжения могут влиять на силу на границе. Интересно, что, как показано в [8], транслятор $\Psi_i^{\prime}(x', x)$ должен осуществлять не параллельный перенос, а так называемый перенос *напряжённым волокном* [22,23], первое упоминание о котором имеется, видимо, у Диксона [24]. Параллельный перенос даёт неправильный результат, зависящий от кривизны пространства, тогда как сила (1.3) возникает лишь в местах изменения кривизны и отсутствует в пространстве постоянной кривизны. Специфика переноса волокном заключается в том, что происходит непараллельное перенесение вектора силы, зависящее от момента силы в волокне и от тензора кривизны пространства.

Однако вернёмся в евклидово пространство. При несбалансированных напряжениях, т.е. при $\partial_j T_\wedge^{ij} \neq 0$, выделенный внутри среды объём испытывает со стороны своей границы *внутреннюю* силу

$$F_{in}^i = -\oint_{\partial V} T_{\Lambda}^{ij} da_{\Lambda}^j = -\int_V \partial_j T_{\Lambda}^{ij} dV^{\Lambda}, \quad -\partial_j T_{\Lambda}^{ij} = f_{in}^i. \quad (1.4)$$

Это вызовет ускорение данного объёма (при отсутствии внешних объёмных сил). Если импульс единицы объёма среды обозначить $p_{\Lambda}^i = T_{\Lambda}^{ii}$ [Н.сек/м³], следует записать

$$\partial_t p_{\Lambda}^i = f_{in}^i \quad \text{или} \quad \partial_t T_{\Lambda}^{ii} + \partial_j T_{\Lambda}^{ij} = 0. \quad (1.5)$$

Подобное несбалансированное напряжение вызывает, например, ускорение материала ракеты в отсутствие гравитационного поля.

Наличие импульса $p_{\Lambda}^i = T_{\Lambda}^{ii}$ означает поток массы, и можно записать уравнение неразрывности среды в виде

$$\partial_t T_{\Lambda}^{ii} + \partial_j T_{\Lambda}^{ij} = 0, \quad (1.6)$$

если обозначить плотность массы и плотность потока массы через T_{Λ}^{ii} [кг/м³] и T_{Λ}^{ij} [кг/сек.м²], соответственно. Таким образом, при отсутствии внешних объёмных сил дивергенция 4-тензора энергии-импульса среды в пространстве-времени Минковского равна нулю:

$$\partial_{\beta} T_{\Lambda}^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.7)$$

однако мы не предполагаем рассматривать здесь преобразования (Лоренца) возникшего пространства-времени.

Воздействие внешней объёмной силы f_{ex}^i на среду нарушает равенство (1.7). Такая сила означает проникновение в нашу среду некой инородной среды или поля. Эта сила появляется справа в равенстве (1.5)

$$\partial_t p_{\Lambda}^i = f_{in}^i + f_{ex}^i, \quad \text{или} \quad \partial_t T_{\Lambda}^{ii} + \partial_j T_{\Lambda}^{ij} = f_{ex}^i, \quad \text{или} \quad \partial_{\beta} T_{\Lambda}^{i\beta} = f_{ex}^i. \quad (1.8)$$

Добавление временной компоненты внешней силы справа в равенстве (1.6) позволяет переписать равенство (1.7):

$$\partial_{\beta} T_{\Lambda}^{\alpha\beta} = f_{ex}^{\alpha}. \quad (1.9)$$

Ускорение выделенного объёма отсутствует, если внутренняя объёмная сила (1.4) компенсируется внешней силой, то есть если $\partial_j T_{\Lambda}^{ij} = f_{ex}^i$. Так будет, например, в лежащем на столе теле под действием гравитационного поля:

$$\partial_z T_{\Lambda}^{zz} = m_{\Lambda} g^z, \quad g^i = \{0, 0, -g\}, \quad (1.10)$$

где m_{Λ} есть массовая плотность, а g^i это вектор напряженности гравитационного поля.

Наоборот, если внутреннее напряжение сбалансировано или отсутствует, $\partial_j T_{\Lambda}^{ij} = -f_{in}^i = 0$,

то среда будет ускоряться под действием внешней силы. В нашем примере, если убрать стол, напряжения исчезнут, и тело будет ускоряться под действием гравитационной силы. От формулы (1.8) останется

$$m_{\Lambda} w^i = m_{\Lambda} g^i. \quad (1.11)$$

2. Механические напряжения электромагнитного поля

Особенностью электромагнитного поля, рассматриваемого в качестве среды, является то, что в нем всегда присутствуют внутренние механические напряжения, и они однозначно определяются характеристиками самого поля, то есть электромагнитным 4-тензором $B_{\alpha\beta}$ и сопряженным с ним тензором $H_{\Lambda}^{\mu\nu} = \sqrt{\eta_{\Lambda}} \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} B_{\alpha\beta}$ [25], которые заданы в пространстве Минковского с псевдо евклидовым метрическим тензором $\eta_{\mu\nu} = \{\eta_{tt} = c^2, \eta_{ij} = -g_{ij}\}$ (нам представляется удобным использовать, вместо обычных, обозначения $B_{\alpha\beta} = -F_{\alpha\beta}$ и

$H_{\wedge}^{\mu\nu} = -F_{\wedge}^{\mu\nu}$). Тензорной плотностью напряжений электромагнитного поля является максвелловский тензор напряжений

$$T_{\wedge}^{ij} = \eta^{ik} (-B_{k\lambda} H_{\wedge}^{\lambda} + \delta_k^j B_{\mu\lambda} H_{\wedge}^{\mu\lambda} / 4), \quad (2.1)$$

который является пространственной частью тензора энергии-импульса

$$T_{\wedge}^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\gamma} (-B_{\gamma\lambda} H_{\wedge}^{\beta\lambda} + \delta_{\gamma}^{\beta} B_{\mu\lambda} H_{\wedge}^{\mu\lambda} / 4). \quad (2.2)$$

Обычное выражение для максвелловского тензора получается из формулы (2.1) с использованием размерных множителей ϵ_0, μ_0 :

$$T_{\wedge}^{ij} = -D_{\wedge}^i E^j - B_{\wedge}^i H_{\wedge}^j + g^{ij} (D_{\wedge}^k E_k + B_{\wedge}^k H_{\wedge}^k) / 2, \quad (2.3)$$

где $E_k = B_{kt}$, $D_{\wedge}^i = \epsilon_0 g_{\wedge}^{ik} E_k$, $B_{\wedge}^i = \epsilon^{ijk} B_{jk}$, $H_{\wedge}^k = B_{\wedge}^i g_{ik} / \mu_0$, $g_{\wedge}^{ik} = g^{ik} \sqrt{g_{\wedge}}$, $g_{\wedge}^i = g_{ik} / \sqrt{g_{\wedge}}$ (тильда ~, вместо wedge \wedge , и звёздочка * отмечают псевдо величины [25]).

Внутренние силы, действующие на электромагнитное поле в единице объёма со стороны границы этого объёма, в соответствии с (1.4), равны дивергенции максвелловского тензора со знаком минус:

$$f_{in}^i = -\partial_j T_{\wedge}^{ij}, \quad (2.4)$$

а внешние объёмные силы, которые, возможно, действуют на поле в том же объёме со стороны инородной среды (на рисунке 4 она красная), в соответствии с (1.9), равны пространственной составляющей дивергенции тензора энергии-импульса

$$f_{ex}^i = \partial_{\beta} T_{\wedge}^{i\beta}. \quad (2.5)$$

Сумма этих сил, естественно, равна производной по времени от импульса поля в том же объёме

$$f_{ex}^i + f_{in}^i = \partial_{\beta} T_{\wedge}^{i\beta} - \partial_j T_{\wedge}^{ij} = \partial_t T_{\wedge}^{it} = \partial_t (g^{ij} B_{jk} H_{\wedge}^{ik}) = \partial_t (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \text{ (Н/м}^3\text{)}. \quad (2.6)$$

Воздействовать на электромагнитное поле могут электрические и магнитные заряды в форме 4-токов, j_{\wedge}^{λ} , $\xi_{\gamma\beta\lambda}$. Они влияют на полевые тензоры, ввиду их связи с механическими напряжениями. Поэтому токи связаны с полевыми тензорами известными уравнениями

$$j_{\wedge}^{\lambda} = \partial_{\beta} H_{\wedge}^{\lambda\beta}, \quad \xi_{\gamma\beta\lambda} = 3\partial_{[\gamma} B_{\beta\lambda]} \quad (2.7)$$

и входят в выражение для дивергенции тензора энергии-импульса (2.2), которая представляет внешнюю объёмную силу (2.5):

$$\begin{aligned} f_{ex}^i &= \partial_{\beta} T_{\wedge}^{i\beta} = \eta^{ij} (-\partial_{\beta} B_{j\lambda} H_{\wedge}^{\beta\lambda} - B_{j\lambda} \partial_{\beta} H_{\wedge}^{\beta\lambda} + \partial_j B_{\beta\lambda} H_{\wedge}^{\beta\lambda} / 2) = \\ &= -g^{ij} (\partial_{\beta} B_{\lambda j} H_{\wedge}^{\beta\lambda} / 2 + \partial_{\lambda} B_{j\beta} H_{\wedge}^{\beta\lambda} / 2 + B_{j\lambda} \partial_{\beta} H_{\wedge}^{\lambda\beta} + \partial_j B_{\beta\lambda} H_{\wedge}^{\beta\lambda} / 2) = \\ &= -g^{ij} (B_{j\lambda} \partial_{\beta} H_{\wedge}^{\lambda\beta} + 3\partial_{[j} B_{\beta\lambda]} H_{\wedge}^{\beta\lambda} / 2). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ввиду отсутствия в природе магнитных зарядов, объёмная сила действует только со стороны электрических зарядов и токов (это первое слагаемое в конце формулы (2.8))

$f_{ex}^i = -g^{ij} B_{j\lambda} \partial_{\beta} H_{\wedge}^{\lambda\beta}$. Противоположная ей сила есть сила Лоренца, действующая, наоборот, со стороны поля на электрические заряды и ток проводимости.

$$\begin{aligned} f_L^i &= -f_{ex}^i = -\partial_{\beta} T_{\wedge}^{i\beta} = g^{ij} B_{j\lambda} \partial_{\beta} H_{\wedge}^{\lambda\beta} = g^{ij} (B_{jt} \partial_k H_{\wedge}^{tk} + B_{jl} \partial_k H_{\wedge}^{lk} + B_{jl} \partial_t H_{\wedge}^{lt}) = \\ &= g^{ij} (\rho E_i + \partial_k H_{\wedge}^{lk} B_{jl} - \partial_t D_{\wedge}^l B_{jl}) = \rho E + \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь возник ток проводимости \mathbf{j} , $j_{\wedge}^l = \partial_k H_{\wedge}^{lk} - \partial_t D_{\wedge}^l$, равный разности (замкнутой) границы магнитного поля, $\partial_k H_{\wedge}^{lk}$, и тока смещения $\partial_t D_{\wedge}^l$. Ток проводимости может быть не замкнут,

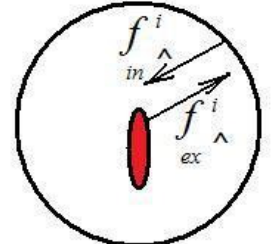


Рис. 4

то есть может иметь потенциальную часть, j_x^l , которая связана с производной потенциального электрического поля $j_x^l = -\partial_t D_x^l$

Сила Лоренца, вообще говоря, отличается от внутренней силы f_{in}^i . Разница между ними вызывает ускорение: $f_{in}^i - f_L^i = -\partial_j T_{\Lambda}^{ij} + \partial_\beta T_{\Lambda}^{i\beta} = \partial_t p_{\Lambda}^i$ (1.8).

Отметим в заключение отличие напряжений в электромагнитном поле от напряжений в обычной среде. В обычной среде напряжения удовлетворяют принципу суперпозиции. В электромагнетизме принципу суперпозиции удовлетворяют не механические напряжения, а электромагнитные поля \mathbf{E} & \mathbf{H} . Напряжения возникают после интерференции полей.

В сжатом газе, например, где $T_{\Lambda}^{ij} = \text{diag}\{p, p, p\}$, давление p представляет собой поток импульса, не сопровождающийся плотностью самого импульса, $T_{\Lambda}^{ii} = 0$. Но нетрудно построить среду, в которой, наоборот, нет напряжений, $T_{\Lambda}^{ij} = 0$, т.е. нет потока импульса, но есть неподвижная объёмная плотность импульса, $T_{\Lambda}^{ii} = p_{\Lambda}^i$. Для этого надо суперпозировать поток положительной массы ρ и поток отрицательной массы $-\rho$, которые двигаются в противоположные стороны:

$$T_{\Lambda}^{ij} = \rho v^i v^j - \rho(-v^i)(-v^j) = 0, \quad T_{\Lambda}^{ii} = \rho v^i - \rho(-v^i) = 2\rho v^i. \quad (2.10)$$

В электромагнетизме такие построения невозможны в принципе.

3. Тензорная плотность спина

Сила (1.1) $F^i = T_{\Lambda}^{ij} a_j^{\wedge}$ пропорциональна площади площадки a_j^{\wedge} . При этом, если тензор напряжения изменяется в пределах территории площадки (рис. 5), то силы, действующие на площадку, будут создавать момент силы τ относительно центра площадки. Величина этого момента будет пропорциональна четвёртой степени размера l площадки: $\tau \sim |\partial_k T_{\Lambda}^{ij} a_j^{\wedge}| l^2$

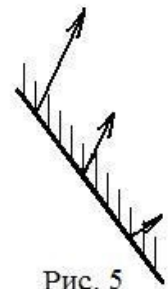


Рис. 5

[26]. Существует, однако идея, что возможно такое напряжение в среде, что на площадку будет действовать, **кроме** силы (1.1), ещё и момент силы τ , пропорциональный, как и сила, площади площадки (рис. 6). Такой момент силы называется спиновым моментом силы. В [27], например, читаем:



Рис. 6

«Под спинирующей жидкостью (spin-fluid) мы понимаем жидкость, каждый элемент которой, обладает, кроме энергии и линейного импульса, также некоторым количеством углового импульса, пропорционального – так же, как энергия и линейный импульс, – объёму этого элемента».

Поэтому такое напряжение среды, по аналогии с (1.1), дополнительно описывается соотношениями

$$d\tau^{ik} = Y_{\Lambda}^{ikj} da_j^{\wedge} [\text{Н.м}], \quad Y_{\Lambda}^{ikj} = -Y_{\Lambda}^{kij} [\text{Н/м}] \quad (3.1)$$

$$dS^{ik} = S_{\Lambda}^{ik} dV^{\wedge} = Y_{\Lambda}^{ikt} dV^{\wedge} [\text{Н.сек.м}], \quad Y_{\Lambda}^{ikt} = -Y_{\Lambda}^{kit} [\text{Н.сек/м}^2]. \quad (3.2)$$

Здесь $d\tau^{ik}$ есть (спиновый) момент силы, с которым задняя часть среды действует на заднюю сторону площадки da_j^{\wedge} и через неё на переднюю часть среды (заштрихована на рис. 6). Y_{Λ}^{ikj} есть плотность потока спина. dS^{ik} и $S_{\Lambda}^{ik} = Y_{\Lambda}^{ikt}$ суть спин элемента объёма dV^{\wedge} и объёмная плотность спина, соответственно. Y_{Λ}^{ikj} , Y_{Λ}^{ikt} суть компоненты тензора спина.

Напряжения среды со спином нужно считать сбалансированными, если суммарный момент силы, действующий на границу $a = \partial V$ некоторого выделенного в среде объёма V ,

будет равен нулю. Но этот суммарный момент силы, кроме спинового, включает в себя также сумму моментов сил, действующих на элементы рассматриваемой поверхности. Поэтому условие сбалансированности выглядит так

$$0 = \oint_{\partial V} (Y_{\wedge}^{ikj} + 2r^{[i}T_{\wedge}^{k]j}) da_j^{\wedge} = \int_V \partial_j (Y_{\wedge}^{ikj} + 2r^{[i}T_{\wedge}^{k]j}) dV^{\wedge} = \int_V \partial_j Y_{\wedge}^{ikj} - 2T_{\wedge}^{[ik]} dV^{\wedge}, \quad (3.3)$$

$$0 = \partial_j T_{\wedge}^{kj}$$

Таким образом, при сбалансированных напряжениях среды со спином, кроме равенства нулю дивергенции тензора напряжений, дивергенция тензора спина должна быть равна антисимметризованному тензору напряжений

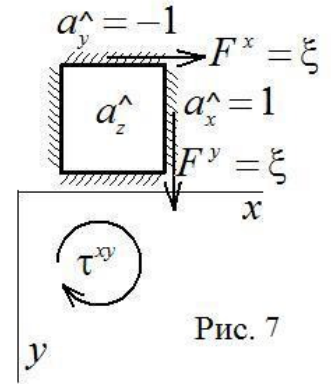
$$\partial_j T_{\wedge}^{kj} = 0, \quad \partial_j Y_{\wedge}^{ikj} = 2T_{\wedge}^{[ik]} \quad (3.4)$$

Для иллюстрации соотношения (3.4) рассмотрим поглощение потока спина в среде. Пусть тензор спина убывает вдоль оси z (ξ – некоторая константа):

$$Y_{\wedge}^{xyz} = 2\xi(1-z). \quad (3.5)$$

$$\text{Тогда } \partial_z Y_{\wedge}^{xyz} = -2\xi = T_{\wedge}^{xy} - T_{\wedge}^{yx}, \quad T_{\wedge}^{xy} = -\xi, \quad T_{\wedge}^{yx} = \xi \quad (3.6)$$

Площадки a_z^{\wedge} воспринимают моменты силы $\tau^{xy} = Y_{\wedge}^{xyz} a_z^{\wedge}$, которые уменьшаются с ростом z . Поэтому кубик, вырезанный из среды, будет действовать на остальную среду силами, касательными к его граням, согласно (1.1). $F^x = T_{\wedge}^{xy} a_y^{\wedge}$, $F^y = T_{\wedge}^{yx} a_x^{\wedge}$ (рис. 7). Подобное напряжение среды, возникающее при поглощении электромагнитной волны круговой поляризации, описано в [28].



Если тензор напряжений некоторой среды принципиально симметричен, то находящийся в такой среде спин не может себя проявлять внутри среды в силу $\partial_j Y_{\wedge}^{ikj} = 0$. Это относится в первую очередь к электромагнитному полю. Однако, если такая среда имеет границу, то эта граница испытывает распределённую силу и распределённый момент силы.

Если напряжения среды со спином не сбалансированы относительно моментов сил, то суммарный момент силы, действующий на границу $a = \partial V$ некоторого выделенного в среде объёма V , будет не равен нулю. Это значит, что выделенный объём среды испытывает со стороны своей границы *внутренний* момент силы

$$\tau_{in}^{ik} = -\oint_{\partial V} (Y_{\wedge}^{ikj} + 2r^{[i}T_{\wedge}^{k]j}) da_j^{\wedge} = -\int_V (\partial_j Y_{\wedge}^{ikj} - 2T_{\wedge}^{[ik]}) dV^{\wedge}, \quad -\partial_j Y_{\wedge}^{ikj} + 2T_{\wedge}^{[ik]} = \tau_{in}^{ik}. \quad (3.7)$$

(мы обозначили здесь объёмную плотность момента силы через τ_{in}^{ik}). Это вызовет увеличение плотности спина в данном объёме, и можно записать

$$\partial_t S_{\wedge}^{ik} = \tau_{in}^{ik}, \quad \text{или } \partial_t Y_{\wedge}^{ikt} = -\partial_j Y_{\wedge}^{ikj} + 2T_{\wedge}^{[ik]}, \quad \text{или } \partial_{\beta} Y_{\wedge}^{ik\beta} = 2T_{\wedge}^{[ik]} \quad (3.8)$$

Рассматривая напряжения в среде в разделе 1, мы заключили, что наличие импульса означает поток массы, и ввели величины (1.6), составляющие верхнюю строчку тензора энергии-импульса. Мы не можем сделать такого заключения в отношении спинового углового импульса, потому что, видимо, нельзя связать со спином некое «движение». Ф. Хель пишет [29]:

«Для массивной материи со спином, скажем для дираковского электрона, плотность тока можно разбить на конвективную часть и поляризационную часть. Поляризационная часть определяется распределением спина электронного поля. Она не может привести к потоку энергии в системе покоя электрона, так как внутреннее спиновое «движение» имеет место только внутри области порядка комптоновской длины волны электрона. Конвективная часть плотности тока описывает среднее движение электронного поля и даёт как импульс, так и поток энергии».

Заметим, что комптоновская длина волны фотона как раз равна длине волны излучения:

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} = \frac{hc}{mc^2} = \frac{hc}{\hbar\omega} = \lambda.$$

Поэтому мы ограничиваемся здесь нижней частью $Y_{\hat{\Lambda}}^{ik\beta}$ 4-тензора спина $Y_{\hat{\Lambda}}^{\mu\nu\beta}$ и не рассматриваем преобразования Лоренца.

Воздействие внешнего объёмного момента силы τ_{ex}^{ik} на среду нарушает равенство (3.8). Такое воздействие означает проникновение в нашу среду некой инородной среды или поля. Этот момент силы появляется справа в равенстве (3.8)

$$\partial_{\beta} Y_{\hat{\Lambda}}^{ik\beta} - 2T_{\hat{\Lambda}}^{[ik]} = \tau_{ex}^{ik} \quad (3.9)$$

4. Попытки моделирования спина моментом импульса

4.1. Одномерная попытка

Сначала попытаемся смоделировать распределённый *спиновый момент силы* моментами пар сил в совсем простом одномерном случае.

Рассмотрим жёсткий стержень, к которому приложено несколько (три штуки) пар сил Q , ξ – плечо пар (**рис. 8 слева**). Для уравнивания момента этих пар со стороны опор действует момент $Fl = 3Q\xi$. Приложенные силы вызывают в стержне напряжения поперечного изгиба и, в частности, поперечную силу F^y , которая вблизи конца стержня равна приложенной там силе F . Однако на территории приложенной пары сил поперечная сила меняет свой знак и величину. При этом оказывается, что среднее значение поперечной силы в стержне при действии пар сил равна нулю: $\langle F^y \rangle = [F(l - 3\xi) - (Q - F)3\xi]/l = 0$. И это не зависит от размера плеча ξ пары сил и от того, сколько пар сил приложено к стержню и как они по нему распределены. Ничего не меняет и переход к «распределённой» паре сил. Впрочем, «распределённая пара сил» даже лишена смысла.

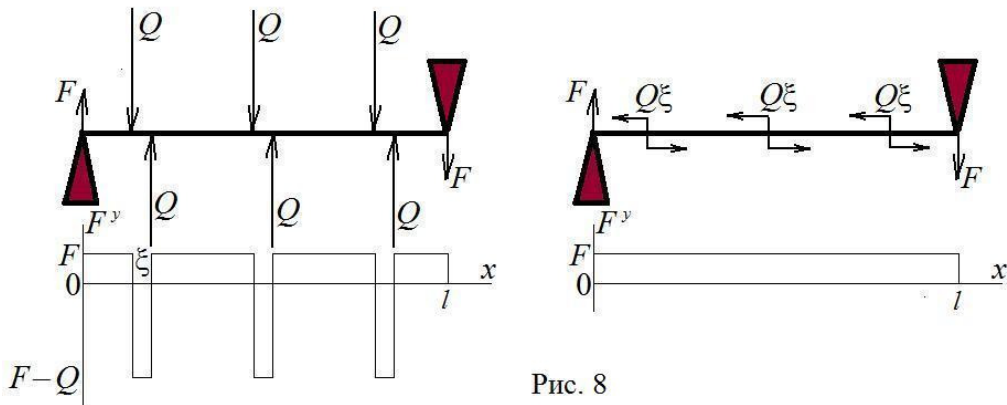


Рис. 8

Аналогом спина, в действительности, в данном случае является не пара сил, а точечный момент силы, изображённый на **рисунке 8 справа**. Такие моменты силы не влияют на поперечную силу, которая остаётся постоянной. И эти спиновые моменты легко превращаются в *распределённый момент силы*. Отличие механического напряжения при спиновом моменте очевидно и принципиально.

Отметим здесь важную деталь. Поперечная сила F^y действует на площадку поперечного сечения нашего стержня $a_x^{\hat{}}$. Однако в стержне отсутствует комплиментарная ей сила F^x , действующая на площадку $a_y^{\hat{}}$. Это означает несимметрию усреднённого тензора напряжений материала стержня. В соответствии с (3.4), такая несимметрия в случае действия пар сил (левый рис. 8) обеспечивается изменением вдоль стержня внутреннего *изгибающего момента* τ^{yx} , в силу «теоремы Журавского» $\partial_x \tau^{yx} = F^y$, (на рисунке τ^{yx} не показан). Однако при распределённом спиновом моменте силы изгибающий момент просто

равен нулю. Такая ситуация эквивалентна существованию антисимметричной части тензора напряжений, которая появилась в (3.4) и в работе [28] как следствие поглощения спина.

4.2. Двумерная попытка

Перейдём теперь к двумерной модели. Распространено мнение, что распределённый момент импульса можно имитировать множеством крутящихся волчков, распределённых в пространстве. Именно этим предположением интуитивно объясняется переход спина фотонов пучка света на поверхность пучка, о чем сказано во Введении. Для анализа этой возможности рассмотрим восемь волчков, которые, ради простоты подсчёта их момента импульса, сделаны не круглыми, а четырёхугольными и даже треугольными (рис. 9). Мы предполагаем, что масса их вращается по их краям, т.е. вдоль их контуров. Пусть линейная плотность массы и скорость равны, соответственно, ρ и v , и пусть моменты импульса L волчков будут одинаковы:

$L = i\phi R_1^2 = i\phi(R_3^2 - R_2^2)$, где $i = \rho v$ [кг/сек] обозначает ток массы. Заметим, что площадь волчка равна $a = L/2i$.

Момент импульса внутри окружности радиуса r_1 равен $4i\phi R_1^2$. А, вот, момент импульса внутри окружности r_2 оказывается отрицательным, потому что $i\phi R_1^2 - i\phi R_2^2 < 0$. Это означает, что момент импульса,

распределённый волчками, не обладает главным свойством спина, быть пропорциональным площади. Можно уменьшать размер волчков, увеличивая плотность их до бесконечности, и сохраняя при этом *скважность* заполнения плоскости волчками, но это не повлияет на вероятность контура, внутри которого окажется отрицательный момент импульса. Можно уменьшать скважность, то есть увеличивать размеры волчков, постепенно поглощая пустое пространство, но сохраняя неизменным момент импульса $L = i2a$ каждого волчка. В этом случае, в пределе, волчки сливаются, а их моменты импульса переходят на возникающую внешнюю окружность радиуса R_3 , так что внутри совсем не остаётся момента импульса, что совсем не годится для имитации спина. Остается сделать вывод: спин не есть момент импульса.

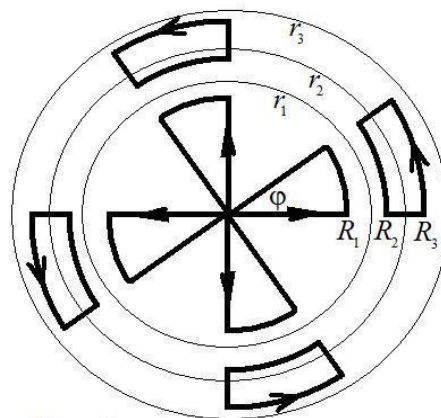


Рис. 9

4.3. Аналогия между моментом импульса и магнитным моментом

Можно заменить в волчках ток массы на ток электрического заряда (см. рисунок 10, взятый из [30]) и представлять волчки как торцы токовых трубок с циркулирующим током плотностью j [А/м] на единицу длины трубки вдоль оси z . Это моделирует магнитные моменты атомов

Весьма схематически рис. 63 изображает собой поперечный разрез магнита. Совокупность молекулярных токов внутри магнита может быть схематически представлена как совокупность токов одинаковой силы, обтекающих каждую ячейку (молекулу) магнита в одинаковом направлении, например против часовой стрелки. Внутри магнита токи смежных молекул взаимно компенсируются, на поверхности же магнита они складываются в круговой ток, обтекающий магнит по окружности¹⁾.

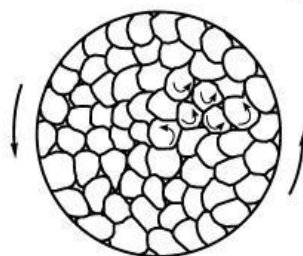


Рис. 63

Рис. 10

статически намагниченного магнетика. В этом случае внутри трубок будет находиться магнитное поле $B = \mu_0 j$, поток которого пропорционален моменту импульса соответствующего волчка, $Ba = \mu_0 ja \sim L$, а вне трубок магнитное поле не будет. При слиянии волчков (теперь – трубок), их «момент количества движения заряда» переходит на периферию. Однако магнитное поле сливающихся трубок к этому переходу отношения не

имеет. Магнитное поле никуда не переходит. Поэтому локальная связь магнитного поля с моментом количества движения является только кажущейся. И присутствие магнитного поля не обязательно связано с присутствием момента количества движения в том же месте.

4.4. Еще одна неудачная апелляция к магнитному полю

Рассуждение Тамма (рис. 10) типично. Оганян пишет «[Существуют] два пути вычисления магнитного поля однородно намагниченного тела. Это поле можно получить интегрированием либо намагниченности по объёму тела, либо намагничивающего тока по поверхности тела»⁹ [1]. Это иллюстрируется формулой

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{M}(\mathbf{x}') \times \nabla' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' = \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV' \quad \mathbf{j}_M(\mathbf{x}') = c \nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{x}')$$

(здесь $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{M}(\mathbf{x}')$ суть векторный магнитный потенциал и магнитный момент единицы объема, соответственно, а $\mathbf{j}_M(\mathbf{x}')$ это «намагничивающий ток», отличный от нуля вблизи поверхности).

Однако спин не может моделироваться «моментом количества движения заряда», и магнитное поле не имеет отношения к спину. Поэтому приведенная фраза Оганяна вовсе не служит доказательством того, что спин находится как бы одновременно внутри тела и на его поверхности. Эта фраза ничего не проясняет в отношении локализации спина пучка света круговой поляризации.

4.5. Сингулярные волчки

В заключение этого раздела продемонстрируем строго, как происходит взаимная компенсация потоков массы смежных волчков и, взамен, появляется поверхностный момент импульса.

Сингулярный безмассовый волчок, сосредоточенный в точке x' , описывается тензором энергии-импульса [25, (5.7)]

$$T_{\wedge}^{i0} = T_{\wedge}^{0i}(x, x') = L^{k'i} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x') / 2, \quad T_{\wedge}^{00} = T_{\wedge}^{ij} = 0 \quad (4.1)$$

где $L^{k'i}$ есть момент импульса волчка. Для того, чтобы в этом убедиться, используем свойства дельта функции (которая на самом деле является плотностью) и её производной

$$f(x') = \int f(x) \delta_{\wedge}(x, x') dV^{\wedge} \quad \text{и} \quad \rho_{\wedge}(x) = \int \rho_{\wedge'}(x') \delta_{\wedge}(x, x') dV^{\wedge'} \quad (4.2)$$

$$\partial_i f(x') = \int f(x) \partial_i \delta_{\wedge}(x, x') dV^{\wedge} \quad \text{и} \quad -\partial_i \rho_{\wedge}(x) = \int \rho_{\wedge'}(x') \partial_i \delta_{\wedge}(x, x') dV^{\wedge'}. \quad (4.3)$$

Положительное значение производной подынтегральной функции или плотности получается, если дифференцирование дельта функции и интегрирование (4.3) производятся по разным координатам. В противном случае получается производная со знаком минус.

Вычисление момента импульса среды, описываемой тензором энергии-импульса (4.1), с использованием первой из формул (4.3) дает

$$\int 2r^{lj}(x, 0) T_{\wedge}^{i0}(x, x') dV^{\wedge} = \int r^{lj}(x, 0) L^{k'ij} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x') dV^{\wedge} = \partial_k r^{lj}(x', 0) L^{k'ij} = L^{j'i}, \quad (4.4)$$

что и требовалось показать.

Пусть теперь имеется плотность $n_{\wedge'}(x')$ таких волчков. Тогда волчки, расположенные в элементе $dV^{\wedge'}$, создадут в элементе dV^{\wedge} момент импульса, равный

$$d^6 L^j = r^{lj}(x, 0) L^{k'ij} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x') dV^{\wedge} n_{\wedge'}(x') dV^{\wedge'}. \quad (4.5)$$

При интегрировании по координатам точки x' точку x следует считать постоянной. Поэтому, согласно второй из формул (4.3), получаем вклад в момент импульса среды от элемента dV^{\wedge} :

⁹ The equivalence between the two ways of calculating the magnetic field of a uniformly magnetized body: either by integrating the magnetization over the volume of the body, or else by integrating the Amperian magnetization current over the surface of the body

$$dL^j = -r^{lj}(x,0)L^{ki} \partial_k n_\Lambda(x) dV^\wedge. \quad (4.6)$$

При равномерном распределении волчков в пространстве это выражение отлично от нуля только на поверхности заполненного объема. Что и требовалось показать.

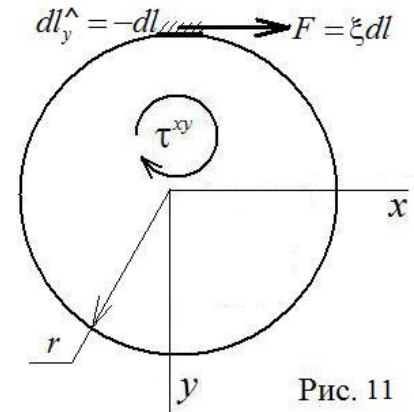
Таким образом, доказано, что спиновый угловой импульс отличается от (более или менее) распределенного момента линейного импульса

5. Поглощение спина

5.1. При поглощении плотности спина возникает антисимметричный тензор напряжений

Напомним теперь, какие механические напряжения возникают в действительности в мишени при поглощении ею потока спина в некоторой области [28]. Мы рассматриваем здесь «обычную» среду, которая не способна аккумулировать спин и содержать спиновые механические напряжения из раздела 3.

Пусть плотность потока спина равна $Y_\Lambda^{xyz} = 2\xi$ в соответствии с формулой (3.6). Тогда любой круг радиуса r на x,y -поверхности испытывает суммарный момент силы $\tau^{xy}(r) = Y_\Lambda^{xyz} \pi r^2 = 2\xi \pi r^2$. Поэтому его граничная окружность действует на окружающую круг часть поверхности с общей касательной силой $F = \tau/r = 2\xi \pi r$, а элемент dl этой граничной окружности действует на примыкающую часть поверхности с силой $dF = Fdl/(2\pi r) = \xi dl$ (рис. 11). Если этот элемент окружности направлен перпендикулярно оси y , то, по аналогии с рис. 7, он будет иметь компоненту $dl_y^\wedge = -dl$. Это значит $dF^x = -\xi dl_y^\wedge$ (здесь элемент dl_y^\wedge имеет внешнюю ориентацию на плоскости). Поскольку на плоскости тензор напряжений T_Λ^{ij} определяется равенством $dF^i = T_\Lambda^{ij} dl_j^\wedge$, это даёт компоненту тензора напряжений поверхности $T_\Lambda^{xy} = -\xi$.



Для определения компоненты T_Λ^{yx} рассмотрим теперь квадратный элемент поверхности, сторонами которого являются dl_y^\wedge и dl_x^\wedge (ср. рис. 7). Он испытывает момент силы $d\tau^{xy} = 2\xi (dl)^2$ и должен такой же момент силы передавать окружающей части поверхности. Для этого его сторона dl_x^\wedge должна действовать с силой $dF^y = \xi dl_x^\wedge$ на прилегающие части плоскости. Это даёт $T_\Lambda^{yx} = \xi$. В результате определяется тензор напряжений поверхности при прохождении сквозь неё потока спина с плотностью 2ξ , направленного вдоль оси z : $T_\Lambda^{yx} = -T_\Lambda^{xy} = \xi$. Получившееся однородное напряжение замечательно тем, что любой круг, где бы он ни был выделен, будет действовать на окружающую круг часть поверхности с общей касательной силой $F = \tau/r = 2\xi \pi r$.

5.2. Предварительные рассуждения о функции Грина

Поглощаемый средой сторонний спин проявляет себя распределённым спиновым моментом силы $\tau_\Lambda^j(x)$, который вызывает определенные механические напряжения в среде $T_\Lambda^{ij}(x)$.

Точно так же плотность электрического заряда $\rho_\Lambda(x)$ вызывает электрическое поле $E_\Lambda^i(x)$. Аналогия распространяется и на справедливость принципа суперпозиции и на способ расчета. Поэтому напомним использование функции Грина [25]

$$G_{\wedge}^i(x, x') = \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} \quad (5.1)$$

для расчета электрического поля

$$\int \rho_{\wedge'}(x') \frac{\mathbf{r}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} dV^{\wedge'} = \mathbf{E}(x). \quad (5.2)$$

Сама по себе функция Грина (5.1) представляет собой электрическое поле единичного точечного заряда, находящегося в точке x' . Поэтому она обладает двумя свойствами:

$$\oint_a G_{\wedge}^i(x, x') da_i^{\wedge} = 1, \quad (5.3)$$

если точка x' находится внутри поверхности a , и

$$\partial_i G_{\wedge}^i(x, x') = 0. \quad (5.4)$$

Отсюда вытекает важное следствие

$$\oint_a G_{\wedge}^i(x, x') da_i^{\wedge} = \Pi(x'), \quad (5.5)$$

где через $\Pi(x')$ обозначена «П-образная» функция, равная единице в точках внутри поверхности интегрирования a и равная нулю вне этой поверхности. Эти два свойства доказывают верность расчета электрического поля (5.2). Действительно, вычислим поток поля (5.2) через некоторую замкнутую поверхность a

$$Q = \oint_a \int \rho_{\wedge'}(x') G_{\wedge}^i(x, x') dV^{\wedge'} da_i^{\wedge} = \int \rho_{\wedge'}(x') \Pi(x') dV^{\wedge'}. \quad (5.6)$$

Видно, что этот поток равен заряду, находящемуся внутри поверхности a . Это и означает, в частности, $\rho = \text{div } \mathbf{E}$.

5.3. Расчет тензора напряжений при распределенном спиновом моменте силы

Пусть единичный точечный момент силы τ_1^{ij} , приложенный в точке, x' вызывает в упругой среде напряжения, описываемые симметричной по индексам функцией Грина $G_{\wedge}^{ij}(x, x', \tau_1^{ij})$ в качестве тензорной плотности напряжений. Эта функция обладает двумя свойствами

$$\partial_i G_{\wedge}^{ij}(x, x', \tau_1^{ij}) = 0 \quad (5.7)$$

$$\oint_a 2r^{li} G_{\wedge}^{jlk}(x, x', \tau_1^{ij}) da_k^{\wedge} = \tau_1^{ij} \Pi(x'). \quad (5.8)$$

Тогда воздействие распределенного спинового момента силы с плотностью $\rho_{\wedge}(x) \tau_1^{ij}(x)$ создаст механические напряжения, описываемые тензором

$$\oint_a \rho_{\wedge'}(x') G_{\wedge}^{ij}(x, x', \tau_1^{ij}(x')) dV^{\wedge'} = T_{\wedge}^{ij}(x). \quad (5.9)$$

Действительно, вычислим момент силы, приложенный замкнутой поверхностью a к окружающей среде:

$$\tau^{ij} = \oint_a 2r^{li} T_{\wedge}^{jlk}(x) da_k^{\wedge} = \oint_a 2r^{li} \int \rho_{\wedge'}(x') G_{\wedge}^{jlk}(x, x', \tau_1^{ij}(x')) dV^{\wedge'} da_k^{\wedge} = \int \rho_{\wedge'}(x') \tau_1^{ij}(x') \Pi(x') dV^{\wedge'}. \quad (5.10)$$

Видно, он равен интегралу от плотности спинового момента силы по внутренности поверхности a , как и должно быть.

Интересно преобразовать момент силы (5.10) по теореме Гаусса:

$$\tau^{ij} = \oint_{a=\partial V} 2r^{li} T_{\wedge}^{jlk}(x) da_k^{\wedge} = \int_V \partial_k (2r^{li} T_{\wedge}^{jlk}) dV^{\wedge} = \int_V (2\delta_k^{li} T_{\wedge}^{jlk}) dV^{\wedge} = \int_V 2T_{\wedge}^{lji} dV^{\wedge}. \quad (5.11)$$

Видно, что если среда не способна нести спин, то момент силы, действующий со стороны внутренности некоторой замкнутой поверхности, обеспечивается антисимметричной частью тензора напряжений, как в разделе 5.1.

В заключение этого раздела приведем явное выражение для функции Грина в двумерном случае. Простой вид она имеет в полярных координатах:

$$G_{\wedge}^{rr} = G_{\wedge}^{\varphi\varphi} = 0, \quad G_{\wedge}^{r\varphi} = G_{\wedge}^{\varphi r} = 1/(2\pi r^2). \quad (5.12)$$

Действительно, интегрируя в духе (5.8) величину $2r^{li}G_{\wedge}^{jlk}$ по окружности, получаем единицу:

$$\tau_1^{r\varphi} = \oint r^r G_{\wedge}^{\varphi r} dl^{\wedge} = \int \frac{1}{2\pi r} d\varphi = \frac{1}{r}, \quad \tau_1^{r\hat{\varphi}} = \tau_1^{r\varphi} \sqrt{g_{\varphi\varphi}} = 1, \quad (5.13)$$

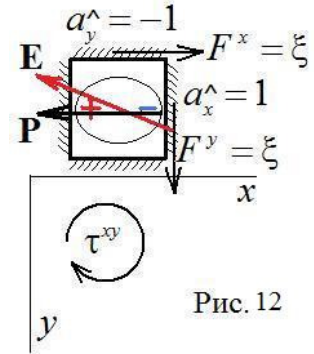
где $\hat{\varphi}$ означает «физическую» компоненту. И, кроме того,

$$\nabla_j G_{\wedge}^{\varphi j} = \partial_r G_{\wedge}^{\varphi r} + \Gamma_{jk}^{\varphi} G_{\wedge}^{kj} = \partial_r G_{\wedge}^{\varphi r} + 2\Gamma_{r\varphi}^{\varphi} G_{\wedge}^{r\varphi} = 0. \quad (5.14)$$

Напомним, что при интегрировании существенно тензорных величин в криволинейных координатах всегда подразумевается использование трансляторов как в разделе 1.

6. Практическая реализация антисимметричного тензора напряжений

Распределённый, то есть спиновый, момент силы воздействует на среду при поглощении электромагнитной волны круговой поляризации. Бет [31] пишет по этому поводу: «Световая волна вызывает момент силы из-за того, что диэлектрическая постоянная $\tilde{\epsilon}$ является тензором. Поэтому напряженность электрического поля \mathbf{E} , вообще говоря, не параллельна электрической поляризации \mathbf{P} или электрической индукции $\mathbf{D} = \tilde{\epsilon}\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ в среде. Момент силы в единице объёма, возникающий из-за воздействия электрической напряженности на поляризацию среды, равняется $\tau_{\wedge} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$ ». На рисунке 12 мы изобразили вектора \mathbf{P} и \mathbf{E} , которые вращаются по часовой стрелке. Они увлекают за собой кубик, в котором находится поляризованный элемент, и всю окружающую среду.



Вот мы и рассмотрим плоскую волну круговой поляризации, распространяющуюся вдоль оси z . \tilde{k} есть комплексное волновое число, мнимая часть которого является коэффициентом затухания волны в среде (мы отмечаем значком breve комплексные числа и вектора):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}} &= \exp[i(\tilde{k}z - \omega t)](\mathbf{x} + i\mathbf{y})E_0, \quad \tilde{\mathbf{B}} = -i\sqrt{\tilde{\epsilon}}\tilde{\mathbf{E}}, \\ \tilde{\epsilon} &= \tilde{k}^2 / \omega^2, \quad \tilde{k} = k' + ik'', \quad \tilde{k}^2 = k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' \end{aligned} \quad (6.1)$$

(Здесь и далее для простоты мы считаем $c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$). Объёмная плотность спинового момента силы (вернее псевдо плотность, она отмечается тильдой, а не wedge) после усреднения по времени выглядит так (здесь $e_z^{zy} = 1$):

$$\begin{aligned} \tau_z^z &= e_z^{zy} \Re\{\tilde{P}_{[x} \tilde{E}_{y]}\} = \Re\{(\tilde{\epsilon} - 1)\tilde{E}_{[x} \tilde{E}_{y]}\} = \exp(-2k''z) \Re\{(\tilde{\epsilon} - 1)(-i - i)\} E_0^2 / 2 = \\ &= \exp(-2k''z) \Im(\tilde{\epsilon} - 1) E_0^2 = \exp(-2k''z) 2k'k'' E_0^2 / \omega^2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Можно подсчитать спиновый момент силы, действующий на единицу поверхности $z = 0$ диэлектрика, проинтегрировав затухающую плотность (6.2) по z :

$$\tau / a = \int_0^{\infty} \exp(-2k''z) 2k'k'' E_0^2 dz / \omega^2 = k' E_0^2 / \omega^2 \quad (6.3)$$

Этот результат был давно опубликован [32]. К сожалению, соответствующую статью отклонили журналы ЖЭТФ, ТМФ, Физика, УФН. К сожалению, Соколов [33] проигнорировал тривиальную формулу $\tau_{\wedge} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$ и написал о «неправильных выводах Бета о плотности потока момента в плоской волне» (стр. 184). Эту формулу удивительным образом проигнорировал Лоудон [34], хотя и привел ее [34 (7.18)]. Эта его работа была разобрана в статье [35], но, к сожалению, статья была отклонена всеми научными журналами.

7. Потоки импульса и энергии, сопутствующие потоку спина

Стандартная электродинамика позволяет аналогично рассчитать не только плотность потока спина (6.3), но и плотности потока импульса и энергии. Вектор поляризации, его производная по времени, представляющая собой поляризационную часть тока смещения, и плотность силы Лоренца, действующая на эту часть, даются выражениями:

$$\mathbf{P} = (\epsilon - 1)\mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \partial_t \mathbf{P}, \quad \mathbf{f} = [\mathbf{j}\mathbf{B}]. \quad (7.1)$$

Для расчета давления нас интересует z -компонента силы Лоренца:

$$\begin{aligned} \langle f_z \rangle &= \Re\{\check{j}^x \bar{B}^y - \check{j}^y \bar{B}^x\} / 2 = \\ &= \exp(-2k''z) \Re\{-i\omega(\bar{\epsilon} - 1) i\bar{k}(-i/\omega) - (-i\omega)(\bar{\epsilon} - 1) i\bar{k}(i/\omega)\} E_0^2 / 2 = \\ &= \exp(-2k''z) \Re\{-(\bar{\epsilon} - 1) i\bar{k}\} E_0^2 = \exp(-2k''z) \Im\{(\bar{\epsilon} - 1)\bar{k}\} E_0^2 = \\ &= \exp(-2k''z) \Im\{(k'^2 / \omega^2 - k''^2 / \omega^2 + 2ik'k'' / \omega^2 - 1)(k' - ik'')\} E_0^2 = \\ &= \exp(-2k''z) (k'^2 / \omega^2 + k''^2 / \omega^2 + 1) k'' E_0^2 = \exp(-2k''z) (k^2 / \omega^2 + 1) k'' E_0^2 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Интегрируя по z аналогично (6.3), получаем давление на поверхность $z = 0$:

$$p = (k^2 / \omega^2 + 1) E_0^2 / 2. \quad (7.3)$$

Энергия, входящая через единицу поверхности $z = 0$ диэлектрика, подсчитывается совсем просто: момент силы $\tau_{\wedge} = \mathbf{P} \times \mathbf{E}$ совершает работу $\tau_{\wedge} \omega = \mathbf{P} \times \mathbf{E} \omega$, поскольку вектора \mathbf{P} , \mathbf{E} крутятся с угловой скоростью ω . Так что плотность потока энергии равна, по (6.3), просто

$$P/a = \tau \omega / a = k' E_0^2 / \omega \quad (7.4)$$

Последнее рассуждение приводит Фейнман. На **рисунке 13**, взятом из [15], вектор \mathbf{r} направлен по вектору поляризации, а касательная составляющая электрического поля \mathbf{E}_t производит момент силы и одновременно работает.

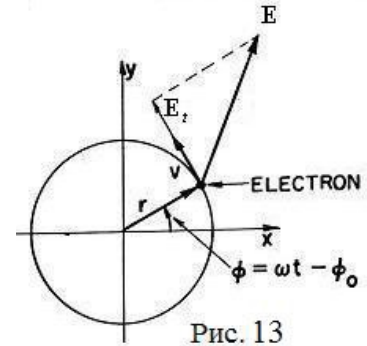


Рис. 13

8. Использование тензора энергии-импульса

Как это часто бывает в физике, плотности потоков импульса и энергии могут быть вычислены двумя разными способами: «динамическим», который мы применили в разделе 7, и «энергетическим». Именно, давление (7.3) и плотность мощности (7.4) могут быть получены с использованием тензора энергии-импульса (2.2). Давление является компонентой T_{\wedge}^{zz} . Используя (6.1), получаем (7.3)

$$p = T_{\wedge}^{zz} = (E^2 + B^2) / 2 = (1 + k^2 / \omega^2) E_0^2 / 2. \quad (8.1)$$

Плотность мощности есть вектор Пойнтинга. Результат совпадает с (7.4)

$$\langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = \Re\{\check{E}_x \bar{B}_y - \check{E}_y \bar{B}_x\} / 2 = \Re\{i\bar{k}(-i) - i i \bar{k}\} E_0^2 / 2 \omega = k' E_0^2 / \omega. \quad (8.2)$$

И вот тут наступает волнующий момент. Оказывается, стандартная электродинамика не в состоянии таким же образом, то есть, используя тензор энергии-импульса, вычислить плотность потока спина, найденную в разделе 6 «динамическим» способом! Другими словами, спиновый момент силы действует на диэлектрик, а тензор Максвелла этого не замечает. Оказалось, что для вычисления спина нужен *тензор спина* вдобавок к тензору энергии-импульса. Тензор спина классической электродинамики был предложен в 1999 году [36] (заграничная публикация [37]). Он используется в разделе 9.

9. Тензор спина электродинамики и его использование

Тензор спина (3.1) электромагнитных волн определён через векторный магнитный и векторный электрический потенциалы [28, 38]:

$$Y^{\lambda\mu\nu} = (A^{[\lambda}\partial^{|\nu|}A_{\Lambda}^{\mu]} + \Pi^{[\lambda}\partial^{|\nu|}\Pi_{\Lambda}^{\mu]}), \quad (9.1)$$

где A^{λ} и Π^{λ} удовлетворяют равенствам $2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = B_{\mu\nu}$, $2\partial_{[\mu}\Pi_{\nu]} = -e_{\mu\nu\alpha\beta}H^{\alpha\beta}$, и надо учитывать, что из-за сигнатуры метрики, $\partial^z = -\partial_z$. Поскольку

$$d\tau_z = d\tau^{xy} = Y^{\lambda xyz} da_{\lambda}^x, \quad (9.2)$$

то нас интересует компонента

$$Y^{xyz} = -\Re(\bar{A}^x\partial_z\bar{A}^y - \bar{A}^y\partial_z\bar{A}^x + \bar{\Pi}^x\partial_z\bar{\Pi}^y - \bar{\Pi}^y\partial_z\bar{\Pi}^x)/4, \quad (9.3)$$

где

$$A^x = -\int E^x dt, \quad A^y = -\int E^y dt, \quad \Pi^x = \int H^x dt, \quad \Pi^y = \int H^y dt. \quad (9.4)$$

Некоторая трудность заключается в том, что выражение (9.1) справедливо в вакууме, а не в диэлектрике. Поэтому для расчёта плотности потока спина следует считать, что поле (6.1),

$$\check{E} = \exp[i(\check{k}z - \omega t)](\mathbf{x} + iy)E_0, \quad \check{B} = -i\check{k}\check{E}/\omega, \quad \check{k} = k' + ik'', \quad (6.1)$$

создано в диэлектрике при $z > 0$ электромагнитной волной \check{E}_1, \check{B}_1 , которая падает на диэлектрик слева, и частично отражается,

\check{E}_2, \check{B}_2 , (рис. 14). (В отношении тензора Максвелла эта трудность

не возникает в силу непрерывности \mathbf{E} & \mathbf{B} на границе). Итак, следует рассчитать плотность потока спина в этих волнах при

$z < 0$, считая, что этот поток входит в диэлектрик. Непрерывность полей на границе $z = 0$, $\check{E}_1 + \check{E}_2 = \check{E}$, $\check{B}_1 + \check{B}_2 = \check{B}$, позволяет найти

$$\check{E}_1 = (1 + \check{k}/\omega)\exp[i(\omega z - \omega t)](\mathbf{x} + iy)E_0/2, \quad \check{B}_1 = -i\check{E}_1, \quad (9.5)$$

$$\check{E}_2 = (1 - \check{k}/\omega)\exp[i(-\omega z - \omega t)](\mathbf{x} + iy)E_0/2, \quad \check{B}_2 = i\check{E}_2. \quad (9.6)$$

Чтобы упростить выражение (9.3), заметим, что на основании (9.5), (9.6) $\check{E}^y = i\check{E}^x$, а потому $\check{A}^y = i\check{A}^x$ и

$$\bar{A}^x\partial_z\bar{A}^y = -\bar{A}^y\partial_z\bar{A}^x = i\bar{A}^x\partial_z\bar{A}^x, \quad (9.7)$$

В результате вместо (9.3) мы имеем

$$Y^{xyz} = -\Re(i\bar{A}^x\partial_z\bar{A}^x + i\bar{\Pi}^x\partial_z\bar{\Pi}^x)/2, \quad (9.8)$$

Займёмся первым слагаемым формулы (9.8), где

$$\bar{A}^x = -i\check{E}^x/\omega = -i(\check{E}_1^x + \check{E}_2^x)/\omega, \quad \partial_z\bar{A}^x = (\check{E}_1^x - \check{E}_2^x). \quad (9.9)$$

$$-\Re(i\bar{A}^x\partial_z\bar{A}^x)/2 = \Re\{(\check{E}_1^x + \check{E}_2^x)(\check{E}_1^x - \check{E}_2^x)\}/2\omega = [(E_1^x)^2 - (E_2^x)^2]/2\omega + \Re(-\check{E}_1^x\check{E}_2^x + \check{E}_2^x\check{E}_1^x)/2\omega. \quad (9.10)$$

Последнее слагаемое в формуле (9.10) содержит мнимое количество под знаком \Re и потому равно нулю. А первое слагаемое компоненты тензора спина в формуле (9.8) равно

$$-\Re(i\bar{A}^x\partial_z\bar{A}^x)/2 = [1(1 + \check{k}/\omega)^2 - 1(1 - \check{k}/\omega)^2]E_0^2/8\omega = [(1 + k'/\omega)^2 + (k''/\omega)^2 - (1 - k'/\omega)^2 - (k''/\omega)^2]E_0^2/8\omega = k'E_0^2/2\omega^2 \quad (9.11)$$

Мы не будем утомлять читателя здесь доказательством того, что второе слагаемое в формуле (9.8), именно $-\Re(i\bar{\Pi}^x\partial_z\bar{\Pi}^x)/2$, оказывается, равно первому. Отметим только, что эта часть тензора спина, зависящая от Π , отличается от части, зависящей от A , и существенно её дополняет только при подсчёте плотности спина, то есть компоненты Y^{xy} . Это показано, например, в [37].

Итак, мы нашли компоненту Y^{xyz} тензора спина (9.1)



$$Y^{xyz} = k'E_0^2 / \omega^2 \quad (9.12)$$

и тем самым предъявили второй способ подсчёта плотности спинового момента силы (6.3), который действует на диэлектрик, поглощающий электромагнитную волну круговой поляризации. Именно, мы воспользовались тензором спина электродинамики.

10. Заключение

В этой сугубо методической работе мы проиллюстрировали три утверждения.

1. Плоские электромагнитные волны круговой поляризации или пучок таких волн содержат, несут и приносят к мишени плотность потока спинового углового импульса, и это не связано с наличием бокового края пучка.
2. Воздействие этого спина на поглощающий диэлектрик (то есть распределенный вращающий момент силы) легко рассчитывается в рамках электродинамики Максвелла, но не с помощью тензора энергии-импульса Максвелла.
3. Это воздействие может быть рассчитано также с помощью тензора спина, который введён в электродинамику вдобавок к тензору энергии-импульса.

11. Материалы для дальнейшего чтения

11.1. Локализация момента силы пучка света круговой поляризации.

Доказательство того, что распределённый момент силы пучка света круговой поляризации действует на **всей освещённой площади** мишени получено экспериментально ещё в позапрошлом веке. Р. Вуд [39] описывает опыт Ригхи (1882). В этом опыте два когерентных пучка круговой поляризации пропускались через полуволновые пластинки, каждый через свою, так что направление круговой поляризации изменялось на противоположное, а пластинки испытывали момент силы. При этом одну из пластинок вращали в её плоскости, так что производилась работа, которая изменяла частоту света пучка. В результате, при интерференции пучков интерференционные полосы двигались, и они двигались равномерно по всем освещённому полю. В дальнейшем опыт был повторен [40] и модернизирован [41].

11.2. Двухкомпонентная мишень

Вопрос о том, где приложен момент силы пучка круговой поляризации при его взаимодействии с мишенью, рассматривался на Московском Семинаре В. Л. Гинзбурга весной 1999 года и в дальнейшем был опубликован [42]. Ответ [43] написали авторы, отрицающие реальность тензора спина. Тем не менее, они сделали вывод, что момент силы действует на любую внутреннюю часть поверхности мишени, а не только на её край (вопреки обычным утверждениям, см. Введение настоящей статьи). Для такого вывода авторы мысленно разделяли пучок на внутреннюю и внешнюю части и объясняли действие момента на мишень влиянием края этой воображаемой внутренней части пучка. Мы открыто критиковали такое рассуждение [28], однако авторы критику проигнорировали, несмотря на личные обращения к ним по электронной почте.

11.3. Тензор спина классической электродинамики

Тензор спина, в паре с тензором энергии-импульса, естественно возникает в теореме Нетер. Для канонического лагранжиана $L_c = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} / 4$ эта пара (канонических) тензоров выглядит так

$$T_c^{\lambda\mu} = -\partial^\lambda A_\nu F^{\mu\nu} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4, \quad Y_c^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu}. \quad (11.1)$$

В стандартной процедуре Белинфанте-Розенфельда к канонической паре «рукой» добавляют [44]:

$$t^{\lambda\mu} = \partial_\nu A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad v^{\lambda\mu\nu} = 2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu} \quad (11.2)$$

с целью получить вместо канонического тензора энергии-импульса максвелловский тензор энергии-импульса и одновременно элиминировать тензор спина в стандартной электродинамике.

$$T^{\lambda\mu} = T_c^{\lambda\mu} + t^{\lambda\mu} = -F^{\lambda\nu} F^{\mu\nu} + g^{\lambda\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} / 4, \quad Y_{st}^{\lambda\mu\nu} = Y_c^{\lambda\mu\nu} + v^{\lambda\mu\nu} = 0. \quad (11.3)$$

Введение таких добавок оправдывается тем, что для свободного поля, то есть когда $\partial_\mu F^{\mu\nu} \equiv j^\mu = 0$, добавки удовлетворяют уравнениям

$$\partial_\mu t^{\lambda\mu} = 0, \quad 2t^{[\lambda\mu]} = \partial_\nu v^{\lambda\mu\nu}. \quad (11.4)$$

Эта процедура тщательно исследована в [28] с подробным цитированием монографии [45]. Отмечено, в частности, что любое добавление к тензору энергии-импульса и тензору спина противоречит локальному смыслу этих тензоров (1.1) и (3.1) (см. также [46]). Например, Синг [47], в духе (1.1), пишет: «Мы заимствуем из статистической модели интерпретацию тензора энергии-импульса с помощью потоков и выдвигаем следующее требование:

$$(\text{Поток 4-импульса сквозь трехмерную мишень } dV) = T^{\alpha\beta} dV_\beta \gg. \quad (11.5)$$

Заметим также, что основанием для добавления $\partial_\nu A^\lambda F^{\mu\nu}$ провозглашается [44]

бездивергентность этого выражения, т.е. $\partial_\mu (\partial_\nu A^\lambda F^{\mu\nu}) = 0$. Однако, поскольку эта бездивергентность имеет место только для свободного поля, получившийся вследствие такого добавления (максвелловский) тензор энергии-импульса может применяться только для свободного поля. А это лишено смысла (см. подробное обсуждение этого вопроса на портале physics-online.ru [48]).

Любопытно, что вопреки официальному элиминированию тензора спина электродинамики, в литературе постоянно появляется [8, 49-51] пространственная компонента канонического тензора спина,

$$Y_c^{ij} = \mathbf{E} \times \mathbf{A}, \quad (11.6)$$

который и был уничтожен Белинфанте и Розенфельдом.

Для получения тензора спина (9.1) вместо пары (11.2) для добавки следует использовать пару

$$t^{\lambda\mu} = \partial_\nu A^\lambda F^{\mu\nu}, \quad v_{new}^{\lambda\mu\nu} = 2A^{[\lambda} \partial^{\mu]} A^\nu, \quad (11.7)$$

которая удовлетворяет условию $2t^{[\lambda\mu]} = \partial_\nu v_{new}^{\lambda\mu\nu}$ автоматически.

11.4. Излучение вращающегося диполя. Преобразование Гамблета

Процитируем Соколова [6, стр. 181]. «Эффект потери момента импульса за счет излучения при **вращении электрического диполя** хорошо известен в литературе (см., например, [52]). Приведем выражение потока момента через бесконечно удаленную сферу

$$\frac{dM_z}{dt} = \pm \omega^{-1} \frac{d\mathcal{E}}{dt} \gg. \quad (11.8)$$

Здесь у автора dM_z / dt есть изменение момента импульса диполя, та величина, которую мы обозначаем dL_z / dt , т.е. момент сил, действующих на диполь, а $d\mathcal{E} / dt$ есть мощность.

Видно, что отношение потоков момента импульса и энергии равно отношению спина фотона \hbar и энергии фотона $\hbar\omega$. Это и рассматривается как подтверждение идентичности момента импульса и спина. Однако никто не обратил внимания на угловое распределение этого потока момента импульса. А поток этот исходит из диполя в основном в окрестность плоскости вращения, $dL_z / dt d\Omega \sim \sin^2 \theta$ [53-55], туда, где излучение почти линейно поляризовано, и поэтому не может быть спином, поскольку спин должен излучаться в окрестности оси вращения, где поляризация излучения круговая (см. рис. 15).

С другой стороны, другие авторы для подтверждения идентичности момента импульса и спина используют компоненту канонического тензора спина (11.6). Сначала это делалось не для излучения диполя, а для отрезка пучка света круговой поляризации. Именно, преобразование Гамблета [51, 8],

$$\int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV = \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} dV, \quad (11.9)$$

означает, что момент импульса массы-энергии, циркулирующей на поверхности пучка, равен объемному интегралу от канонического тензора спина и на этом основании их отождествляют друг с другом, несмотря на то, что остается не ясным, где же все-таки локализован «спин - момент», на поверхности, согласно левой части, или внутри пучка, согласно правой части равенства (11.9).

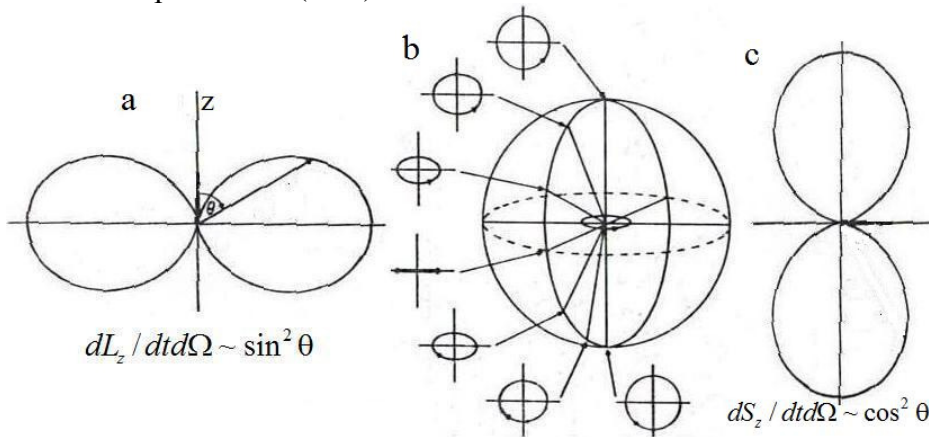


Рис. 15. а) Угловое распределение z-компоненты потока момента импульса.
 б) Поляризация излучения вращающегося диполя при наблюдении с различных направлений.
 в) угловое распределение z-компоненты потока спина

Для подтверждения этой тождественности преобразование Гамблета было повторено для излучения источников, локализованных в ограниченной области пространства [49,50], и был заявлен тот же результат (11.9). Но тут авторы допустили математическую ошибку: они не законно применили интегрирование по частям для случая излучения в пространство. Прямой подсчет по шаровому слою [55] с использованием, в частности, той же формулы $\int \mathbf{E} \times \mathbf{A} dV$, показал, что поток спина в этом случае вдвое меньше потока (орбитального) момента импульса,

$$\left[\int \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) da dr \right]_z = 2 \left[\int \mathbf{E} \times \mathbf{A} da dr \right]_z. \quad (11.10)$$

Поэтому эти величины не могут быть отождествлены. Чего-то подобного следовало ожидать, поскольку при излучении в пространство фотоны летят в разные стороны, и спины их не направлены параллельно друг другу, как в луче.

Существенно, что различные расчеты углового распределения потока спина дают одинаковый результат, именно $dS_z / dt d\Omega \sim \cos^2 \theta$ (рис. 15), не зависимо от того, применяется формула плотности спина $Y_c^{ij} = \mathbf{E} \times \mathbf{A}$ (11.6) [55], или используется плотность потока спина из формулы (9.1) [53,54], или даже применяется квантовомеханическое рассмотрение Фейнмана, выходящее за рамки классической электродинамики [15,56]. Приведем здесь это рассмотрение.

Амплитуды того, что право поляризованный и лево поляризованный фотоны излучаются в направлении θ , суть [15 (16.1), (16.2)]

$$a(1 + \cos \theta)/2 \quad \text{и} \quad -a(1 - \cos \theta)/2. \quad (11.11)$$

Значит, в этом направлении плотность потока спина пропорциональна выражению

$$[a(1 + \cos \theta) / 2]^2 - [a(1 - \cos \theta) / 2]^2 = a^2 \cos \theta, \quad (11.12)$$

и его проекция на ось z оказывается равной

$$dS_z / dt d\Omega \propto \cos^2 \theta. \quad (11.13)$$

Отметим, что (неудачное) преобразование Гамблета повторяется на уровне волновой функции в импульсном пространстве [44, стр. 37].

11.5. Использование криволинейных координат и «законы сохранения»

Согласно (1.2) механические напряжения в среде сбалансированы, если дивергенция плотности напряжений равна нулю. Другими словами,

$$\partial_j T_{\Lambda}^{ij} = 0 \quad (11.14)$$

обеспечивает равенство нулю суммарной силы, действующей на границу $a = \partial V$ любого выделенного объёма V ,

$$F^i = \oint_a T_{\Lambda}^{ij} da_j^{\wedge} = \int_V \partial_j T_{\Lambda}^{ij} dV^{\wedge} = 0. \quad (11.15)$$

Однако эти выражения теряют смысл при использовании криволинейных координат и делаются неверными, поскольку бессмысленно складывать компоненты сил $dF^i = T_{\Lambda}^{ij} da_j^{\wedge}$, которые относятся к разным точкам пространства. Интегрирование должно предусматривать предварительный перенос элементов dF^i в некоторую общую точку, как показано в (1.3).

Проиллюстрируем это на примере изотропного единичного давления. В декартовых координатах оно описывается тензорной плотностью $T_{\Lambda}^{ij} = \text{diag}\{1, 1, 1\}$. В сферических координатах x^a , для которых

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta, \quad \sqrt{g_{\Lambda}} = r^2 \sin \theta, \quad (11.16)$$

мы получим плотность напряжений T_{Λ}^{ab} , используя то, что δ -образный вид смешанного тензора $T_j^i = \delta_j^i$ сохраняется при преобразовании координат:

$$T_{\Lambda}^{ab} = \delta_c^a g^{ac} \sqrt{g_{\Lambda}}, \quad T_{\Lambda}^{rr} = r^2 \sin \theta, \quad T_{\Lambda}^{\theta\theta} = \sin \theta, \quad T_{\Lambda}^{\varphi\varphi} = 1 / \sin \theta. \quad (11.17)$$

Эта плотность удовлетворяет ковариантное равенство

$$\nabla_b T_{\Lambda}^{ab} = 0. \quad (11.18)$$

Именно это равенство, а не (11.14), обеспечивает равенство нулю силы, действующей на замкнутую поверхность, и равенство сил, действующих на поверхности (или гиперповерхности), имеющие общую границу, при условии переноса элементов dF^i в некоторую общую точку (вопреки утверждению [57]).

Действительно, на элемент $da_r^{\wedge} = d\theta d\varphi$ поверхности сферы радиуса r действует сила

$$dF^r = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (11.19)$$

Бессмысленно интегрировать эту величину непосредственно:

$$F^r = r^2 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2. \quad (11.20)$$

Поэтому перенесем силы (11.19) из точек (r, θ, φ) в общую точку $(r, \theta = \pi/2, \varphi = 0)$.

Перенос по меридианам на экватор дает вектора с («физическими») компонентами $(dF^r \sin \theta, -dF^r \cos \theta, 0)$. Дальнейший перенос по экватору приводит к умножению r -компоненты на $\cos \varphi$, сохранению неизменной θ -компоненты, и появлению φ -компоненты:

$$r^2 (\sin^2 \theta \cos \varphi, -\sin \theta \cos \theta, \sin^2 \theta \sin \varphi) d\theta d\varphi. \quad (11.21)$$

Интегрирование последнего выражения по сфере дает ноль. А интегрирование по верхней полусфере дает направленную вверх θ -компоненту

$$F^{\theta} = -r^2 \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -\pi r^2, \quad (11.22)$$

равную силе давления.

12. Благодарности

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за отважную публикацию моего вопроса [42] (вопрос был направлен в редакцию 07.10.1999) и профессору Тимо Ниеминену за содержательные дискуссии (Newsgroups: sci.physics.electromag).

Список литературы

1. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. – М.: ИЛ, 1956.- 451с.
2. Ehrenfest P. J. Russian Phys. Soc. **48**, 17 (1911)
3. Atkinson R. d'E., "Energy and Angular Momentum in Certain Optical Problems," Phys. Rev. **47**, 623-627 (1935)
4. Шапочников К. Ann. D. Phys. Bd 43. S. 473 (1914)
5. Вульфсон К.С. «О моменте количества движения электромагнитных волн» УФН **152** 667 (1987)
6. Соколов И.В. «Момент импульса электромагнитной волны, эффект Садовского и генерация магнитных полей в плазме» УФН **161**, 175 (1991)
7. Барабанов А. Л. «Об угловом моменте в классической электродинамике» УФН **163**, 77 (1993).
8. Ohanian H. C., "What is spin?" Amer. J. Phys. **54**, 500-505 (1986). Есть перевод: Физика за рубежом, Серия Б, Преподавание (М.: МИР, 1988) с. 68.
9. Simmonds J. W., M. J. Guttman, States, Waves and Photons (Addison-Wesley, Reading, MA, 1970)
10. Allen, L.; Padgett, M.J.; Babiker, M. The orbital angular momentum of light. *Progress in Optics XXXIX*; Elsevier: Amsterdam, 1999, p 299.
11. Zambrini, R.; Barnett, S.M. Local transfer of optical angular momentum to matter. *J. Mod. Opt.* **52**: (2005) 1045–1052.
12. Soper D. E., Classical Field Theory (N.Y.: John Wiley, 1976),
<http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=122&module=files>
13. Sadowsky A. *Acta et Comm. Imp. Universitatis Jurievensis* **7**, No. 1-3 (1899)
14. Poynting J. H., The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light. *Proc. R. Soc. Lond. A* **82**, 560-567 (1909)
15. Фейнман Р. et al. «Фейнмановские лекции по физике» 8, 9, (М.: Мир, 1978)
16. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. (М.: Наука, 1965)
17. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicists (Clarendon, Oxford, 1951)
18. Храпко Р. И., Тело с внутренними напряжениями в гравитационном поле. ЖЭТФ **62**, 3 (1972) <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=81&module=files>
19. Храпко Р. И., «Летающая тарелка» - аппарат для исследования сверхтяжелых звезд. Знание – сила, №3, 1972, стр. 32. <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=90&module=files>
20. Pechlaner E., The force on a prestressed body in a curved space. *J. Phys. A*, Vol. 6, May 1973.
21. Храпко Р.И., Протяженное тело в искривленном пространстве. Тезисы докладов всесоюзной гравитационной конференции (ГР-IV, Минск, 1-3 июля, 1976 г.) с. 66.
22. Храпко Р.И., Альтернатива параллельному переносу. Тезисы докладов всесоюзной гравитационной конференции (ГР-IV, Минск, 1-3 июля, 1976 г.) с. 62.
23. Khrapko R.I. The Papapetrou and Dixon Equations. *International J. of Modern Physics D*, **4**, 69 (1995) <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=107&module=files>
24. Dixon W.G., *Nuovo Cimento* **34**, 317 (1964)
25. Храпко Р.И. Наглядное представление дифференциальных форм и псевдоформ. (Lambert Academic Publishing, Saarbrucken, 2011)
<http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=105&module=files>
26. Papapetrou A. Non-symmetric Stress-Energy-Momentum Tensor and Spin-Density. *The Philosophical Magazine* **40**, p.938 (1949)

27. Weysenhoff J. and Raabe A. Relativistic Dynamics of Spin-Fluids and Spin-Particles. Acta Phys. Polon. **9**, p.8 (1947)
28. Khrapko R.I., "Mechanical stresses produced by a light beam," J. Modern Optics, **55**, 1487-1500 (2008) <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=9&module=files>
29. Nehl F. W. "On the energy tensor of spinning massive matter in classical field theory and general relativity" Reports on Mathematical Physics Vol. 9, No. 1, 55 (1976). Есть перевод в сборнике «Актуальные проблемы теоретической физики», опубликованном в связи с пятидесятилетием научной деятельности профессора Д. Иваненко (МГУ, 1976) с. 117.
30. Тамм И.Е. Основы теории электричества. (М.: Физматлит, 2003)
31. Beth R. A., "Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light" Phys. Rev. **50**, 115 (1936).
32. Храпко Р.И. Световой луч круговой поляризации несет удвоенный момент импульса. <http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num14/article6/author.htm> (2003)
33. Соколов И.В. «Момент импульса электромагнитной волны, эффект Садовского и генерация магнитных полей в плазме» УФН **161**, 175 (1991)
34. Loudon R., "Theory of the forces by Laguerre-Gaussian light beams on dielectrics," Phys. Rev. **A68**, 013806 (2003)
35. Храпко Р.И. Поглощение луча круговой поляризации. Критика статьи Лоудона <http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num16/article8/author.htm> (2004)
36. Храпко Р. И., «Истинные тензоры энергии-импульса и спина среды однозначны». Теоретические и экспериментальные проблемы общей теории относительности и гравитации. X Российская гравитационная конференция, Владимир. 1999: Тез. докл. - Москва, 1999. - с.47.
37. Khrapko R.I. True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero. - <http://arXiv.org/abs/physics/0102084>
38. Храпко Р.И. Плотность спина электромагнитных волн. <http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num3/article6/author.htm> (2001)
39. Wood R. W. Physical Optics, 2nd ed, p. 341
40. Atkinson R. d'E., "Energy and Angular Momentum in Certain Optical Problems," Phys. Rev. **47**, 623-627 (1935)
41. Храпко Р.И., "О возможности эксперимента, касающегося 'нелокальности' электродинамики", Квантовая электроника, 2012, **42** (12), 1133–1136. <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=74&module=files>
42. Khrapko R. I., "Does plane wave not carry a spin?" Amer. J. Phys. **69**, 405 (2001). <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=10&module=files>
43. Allen L., M. J. Padgett, "Response to Question #79. Does a plane wave carry spin angular momentum?" Am. J. Phys. **70**, 567 (2002) <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=53&module=files>
44. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика, 3-е издание (1969)
45. Rohrlich F., Classical Charged Particles, (Addison-Wesley, Mass. 1965)
46. Храпко Р. И. Локализация энергии-импульса и спин. //Вестник Российского университета дружбы народов, Серия Физика. – 2002, № 10(1).- с.35-39. <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=32&module=files>
47. Синг Дж. Общая теория относительности (М.: ИИЛ, 1963)
48. Обсуждение статьи Р.И. Храпко "Spin is not a moment of momentum". <http://www.physics-online.ru/MessageFiles/4683/92-%C7%EE%F2%FC%E5%E2Re.pdf>
49. Jackson J. D., Classical Electrodynamics, (John Wiley, 1999), p. 350.
50. Becker R., Electromagnetic Fields and Interactions, V. 2, (NY, Dover, 1964), p. 320
51. Humblet J., "Sur le moment d'impulsion d'une onde electromagnetique". *Physica (Utrecht)* **10** (7): 585 (1943)
52. Джексон Дж. Классическая электродинамика (М.: Мир, 1965).
53. Khrapko R. I. "Radiation of spin by a rotator,"

- <http://www.ma.utexas.edu/cgi-bin/mps?key=03-315> (2003)
54. Храпко Р.И. Спиновый момент импульса дипольного излучения.
<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34635> (2001)
55. Храпко Р.И. Спин не есть момент импульса
<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=28834> (2012)
56. Храпко Р.И. Разница между спином и орбитальным моментом импульса
<http://mai.ru/publications/index.php?ID=8928> (2009)
57. Ландау Л.Д. и Лифшиц Е.М. Теория поля (М.: Наука)

Are spin and orbital moment the same concept? Version 2

Radi I. Khrapko

Moscow Aviation Institute - Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia

The present-day concepts of electrodynamics' spin, which contradict to each other, are considered. Detailed analysis of mechanical stresses in a medium and an electromagnetic field shows validity of the concept of distributed spin, which is proportional to the energy density. A simple calculations of a mechanical action on a medium, which absorbs spin, are demonstrated, and experimental consequences of such absorption are considered. Additional questions are settled, such as the sense of Belinfante-Rosenfeld procedure, and the Humblet transformation when the rotating dipole radiation is calculated by the use of the spin tensor or the Feynman's quantum approach.

26.02.2014