Псевдотензор гравитационного поля – ошибка

Р. И. Храпко*

Московский авиационный институт, Москва, 125993

Показано, что использование стандартного псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля увеличивает рассчитанную массу-энергию замкнутой системы гравитирующих тел, тогда как энергия гравитационного поля, если такая существует, отрицательна. Это дискредитирует стандартный псевдотензор, ибо, согласно этому псевдотензору, энергия гравитационного поля оказывается положительной.
PACS: 04.02.-q, 02.40.-k

1. Если частицы или тела притягиваются друг к другу силами какого-то поля и соединяются, то масса соединения оказывается меньше, чем сумма масс исходных тел. Это называется *дефект масс.* Самый простой пример дает электростатика. Протон и электрон, находящиеся далеко друг от друга, притягиваются друг к другу силами их электрического поля, которое заполняет пространство между ними. При этом, масса-энергия электрического поля составляет часть масс протона и электрона. Другая часть – это вещество протона и электрона. В процессе соединения протона и электрона в нейтральный атом водорода часть энергии их электрического поля постепенно превращается в кинетическую массу-энергию этих частиц, а соответствующая часть поля элиминируется вследствие интерференции. Поэтому можно считать, что в процессе сближения частицы сохраняют свою полную массу-энергию неизменной. Просто часть энергии поля превращается в кинетическую энергию частиц, так что после соединения электрическое поле вне атома оказывается равным нулю. Однако связанная ранее с этим полем энергия, перешедшая временно в кинетическую энергию, каким-то образом уходит в пространство. Поэтому протон и электрон оказываются лишенными определенной части своих электрических полей. Из-за этого масса-энергия атома водорода оказывается меньше, чем сумма масс-энергий свободных протона и электрона на 13,6 эВ.

Таким образом, (отрицательный) дефект массы есть разница между начальной массой-энергией системы «тела + поле» и конечной массой-энергией той же системы, лишившейся некоторой части поля, энергия которой сначала преобразовалась в кинетическую энергию, а потом ушла из системы.

2. Совсем другой смысл у «гравитационного дефекта массы» [1, § 100], который возникает при гравитационном притяжении. Рассмотрим вместо удаленных протона и электрона сферическое облако, окруженное собственным гравитационным полем. Отличие от электростатики видно сразу: электрическое поле, обеспечивающее притяжение протона к электрону, находится между этими частицами, а гравитационное поле, обеспечивающее притяжение частичек облака друг к другу, находится в основном снаружи облака. В центре облака гравитационного поля нет совсем. Кроме того, в случае очень разреженного облака, гравитационное поле вообще оказывается пренебрежимо слабым и не даёт вклад в массу-энергию системы «облако + поле».

Покажем это. Для подсчета массы-энергии вещества неподвижного облака с координатным радиусом r_1 и плотностью ρ существует естественная формула

$$P = \int \rho dV_0 = \int \rho\sqrt{-g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}\,drd\theta d\varphi = \int_0^{r_1} \rho\sqrt{-g_{rr}}\,4\pi r^2 dr\,. \tag{1}$$

Здесь масса обозначена буквой P, потому что масса является суммой модулей 4-импульсов P_i частей облака, а $dV_0 = \sqrt{-g_{rr}g_{\theta\theta}g_{\varphi\varphi}}\,drd\theta d\varphi$ есть элемент «собственного пространственного объема» в сферических координатах [2, (97.4)]. Для внутреннего решения

* Email: khrapko_ri@hotmail.com, http://khrapkori.wmsite.ru

Шварцшильда метрический коэффициент g_{rr} и компонента тензора Эйнштейна G_t^t выражаются через параметр R этого решения (который представляет радиус кривизны трехмерного пространства) [2]:

$$g_{rr} = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}, \quad G_t^t = \frac{3}{R^2}.$$

Поэтому для плотности получается выражение $\rho = T_t^t = \frac{1}{8\pi} G_t^t = \frac{3}{8\pi R^2}$, и интегрирование (1) даёт

$$P = \int_0^{r_1} \frac{3}{2R} \frac{r^2 dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{3R}{4}(\sin^{-1}\xi - \xi\sqrt{1-\xi^2}), \quad \xi = \frac{r_1}{R}.$$

Для малой плотности, $r_1 << R$, получается обычное выражение для массы шара в плоском пространстве

$$P \approx \frac{r_1^3}{2R^2} = \rho \frac{4}{3}\pi r_1^3, \text{ если } r_1 << R.$$

Рассмотрим теперь внешнее решение Шварцшильда, сшитое с внутренним решением для нашего облака при $r = r_1$:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2, \quad m = \frac{r_1^3}{2R^2}.$$

Видно, что параметр m внешнего решения Шварцшильда для разреженного облака, $r_1 << R$, равен массе вещества облака, $m = P$. Это и доказывает, что для такого облака гравитационное поле не даёт вклад в массу-энергию системы «облако + поле».

Вследствие взаимного притяжения частей облако сжимается, и частицы его приобретают кинетическую энергию. Поэтому их масса-энергия увеличивается, как и в случае электростатики. Однако, в отличие от электростатики, гравитационное поле облака при этом не только не элиминируется, а, наборот, увеличивается и начинает давать вклад в общую массу-энергию системы.

В процессе сжатия в облаке возникает давление, которое, в конце концов, останавливает сжатие. При этом, в отличие от электростатики, кинетическая энергия частиц может превратиться в тепловую энергию и остаться в сжавшемся облаке, увеличив его массу по сравнению с исходным значением. И гравитационное поле облака при этом усиливается, распространяясь на область пространства, освобожденную сжавшимся облаком. Поэтому сторонники сохранения полной массы-энергии системы приписывают гравитационному полю отрицательную массу-энергию, так, чтобы сумма энергий вещества облака и гравитационного поля этого облака осталась неизменной в процессе сжатия. Эта неизменная сумма математически равна шварцшильдовскому параметру m, который сохраняется по теореме Биркгофа при сжатии облака. Таким образом, (положительный) гравитационный дефект массы есть разница между массой вещества сжавшегося облака и начальной массой вещества этого облака

Но теперь возникает проблема прямого подсчета той отрицательной гравитационной массы-энергии , которая обеспечивает сохранение начального значения m суммарной массы-энергии системы в процессе сжатия вещества облака.

3. Для дальнейшего полезно записать формулу (1) в 4-мерных обозначениях пространства-времени. Для модуля элемента 4-импульса имеем:

$$dP = \frac{dP_t}{\sqrt{g_{tt}}} = \frac{T^t_{\wedge t}}{\sqrt{g_{tt}}} dV_t^{\wedge} = \frac{T_t^t \sqrt{-g}_{\wedge}}{\sqrt{g_{tt}}} dV_t^{\wedge} = T_t^t (\sqrt{-g_{rr} g_{\theta\theta} g_{\varphi\varphi}})_{\wedge} dV_t^{\wedge} = T_t^t dV_0 = \rho dV_0. \qquad (2)$$

Поясним это. «Тензор энергии-импульса (ЭИ)» в действительности является тензорной *плотностью* $T^i_{\wedge k} = T^i_k \sqrt{g}_{\wedge}$. Для написания плотностей мы не пользуемся готическим шрифтом, как это обычно делается, см., например [1, § 96]. Вместо этого мы отмечаем плотности знаком ‘wedge’ $\wedge$. Такое обозначение использовал И.А. Кунин [3] при переводе на русский язык монографии [4]. Однако в отличие от [3], мы ставим знак $\wedge$ на уровне нижних или верхних индексов для плотностей веса $+1$ или -1 соответственно. Например, элемент объема или элементарная площадка с внешней ориентацией, которые являются плотностями веса -1, обозначаются в пространстве-времени $dV_k^{\wedge}$ или $da_{ik}^{\wedge}$, соответственно, а корень из определителя метрического тензора обозначается $\sqrt{g}_{\wedge}$.

4. Для учета вклада гравитационной массы-энергии предложена некая *нетензорная* плотность полного 4-импульса гравитационного поля вместе с находящимся в нем веществом. Она содержит производные первого и второго порядков метрического тензора используемой системы координат. Мы обозначаем ее $H^i_{\wedge k}$. В [2, (89.3)] она компактно записана в виде частной дивергенции. Эта плотность называется псевдотензором ЭИ вещества вместе с гравитационным полем. Она представляет собой сумму тензора ЭИ вещества и псевдотензора ЭИ гравитационного поля:

$$H^i_{\wedge k} = T^i_{\wedge k} + t^i_{\wedge k} = \partial_l [g^{im}_{\wedge}(\Gamma^l_{km} - \delta^l_{(k}\Gamma_{m)}) - \frac{1}{2}\delta^i_k g^{mn}_{\wedge}(\Gamma^l_{mn} - \delta^l_m \Gamma_n)]/8\pi, \quad \Gamma_m = \Gamma^n_{mn}. \qquad (3)$$

Псевдотензор (3) используется в формуле [2, (88.4)]

$$J_k = \int_V H^i_{\wedge k} dV_i^{\wedge} = \int_V (T^i_{\wedge k} + t^i_{\wedge k}) dV_i^{\wedge} \qquad (4)$$

для вычисления того, что называют полным импульсом гравитационного поля вместе с находящимся в нем веществом при $k = 1, 2, 3$ и полной энергией гравитационного поля вместе с находящимся в нем веществом при $k = t$:

$$J_t = \int_V H^i_{\wedge t} dV_i^{\wedge} = \int_V (T^i_{\wedge t} + t^i_{\wedge t}) dV_i^{\wedge} \qquad (5)$$

Уже из этих формул следует, что предложенный псевдотензор ЭИ гравитационного поля $t^i_{\wedge k}$ должен обеспечить отрицательный вклад в полную энергию (5).

Величина J_t была вычислена для изолированной материальной системы в [2, § 91] интегрированием по гиперповерхности $t = \mathrm{const}$ с использованием пространства-времени, которое принимает на бесконечности приближенно шварцшильдовскую форму:

$$ds^2 = (1 - 2m/r)dt^2 - (1 + 2m/r)(dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (6)$$

Получен ожидаемый результат

$$J_t = m. \qquad (7)$$

Тот же результат получен снова в [2, § 92] и [2, § 97], но тут в явном виде представлена компонента псевдотензора $t^t_{\wedge t}$, которая оказалась равной сумме давлений в рассматриваемом случае и положительной (!):

$$J_t = \int (T^t_{\wedge t} + t^t_{\wedge t}) dV_t^{\wedge} = \int (T^t_t - T^1_1 - T^2_2 - T^3_3)\sqrt{-g}_{\wedge}(dxdydz)^{\wedge} = \int (\rho + 3p)\sqrt{g_{tt}}\, dV_0 = m. \qquad (8)$$

Тут возникает недоумение. Каким образом положительная добавка к компоненте тензора ЭИ материи $T^t_{\wedge t}$ в виде компоненты псевдотензора ЭИ гравитационного поля,

$$t^t_{\wedge t} = (-T^1_1 - T^2_2 - T^3_3)\sqrt{-g}_{\wedge} > 0, \qquad (9)$$

может описать отрицательную гравитационную энергию? Почему интеграл (8) с этой положительной добавкой имеет значение m, которое меньше, чем значение интеграла (1), равное $P \geq m$?

Ответ прост. Интеграл (5) или (8) дает не энергию J, соответствующую псевдотензору (3). В формулах (5), (8) интегрируется элемент *компоненты* $dJ_t = H^t_{\wedge t} dV_t^{\wedge}$ 4-

импульса J_k, а не элемерт модуля dJ. Поэтому величина этого интеграла значительно меньше энергии J. Это видно потому, что интеграл (8) содержит $\sqrt{g_{tt}} < 1$. Кроме того, следует отметить, что интегралы (4), (5), (8) в принципе не имеют смысла. Дело в том, что нельзя интегрировать тензорные величины, находящиеся в разных точках пространства. Для интегрирования их сначала надо перенести в некоторую общую точку. Если это не сделать, то при использовании криволинейных координат компоненты интеграла не образуют геометрическую величину (вектор), потому что формулы (4), (5), (8) предполагают арифметическое сложение компонентов векторов dJ_k принадлежащих различным точкам пространства, в которых координатные реперы могут быть отличаться друг от друга. Поэтому не существует репера, к которому могли бы относиться компоненты интеграла. А без поддержки репера компоненты всегда бессмысленны.

5. Для корректного получения полной массы-энергии J в случае сферического неподвижного тела с помощью псевдотензора (3) можно воспользоваться тем, что в этом случае инфинитезимальные векторы dJ_k все параллельны между собой, а потому можно складывать их модули, которые не изменяются при переносе в единую точку для суммирования. Поэтому можно беспрепятственно интегрировать инфинитезимальные модули $dJ = dJ_t / \sqrt{g_{tt}}$. И тогда мы получим для «полной энергии гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей», согласно предложенному псевдотензору (3), вместо (8) интеграл

$$J = \int (\rho + 3p) dV_0 = P + \int 3p dV_0 , \qquad (10)$$

что полностью дискредитирует этот псевдотензор, роль которого – описать отрицательный вклад гравитационной массы-энергии в полную массу-энергию системы.

Отметим, что, в свете изложенного, грандиозные построения (см., например [5]), основанные на неких лагранжианах, с целью решить проблему энергии в теории тяготения Эйнштейна выглядят не убедительными.

Заключение

Стандартный псевдотензор (3) не дает «полный 4-импульс гравитационного поля вместе с находящейся в нем материей», m, и физически бессмысленен. Подробнее см. [6].

Литература

1. Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц, Теория поля (М.: Наука, 1973)
2. Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология (М.: Наука, 1974)
3. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. (М.: Наука, 1965)
4. Schouten J. A., Tensor Analysis for Physicists (Clarendon, Oxford, 1951)
5. Фаддеев Л.Д. Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна. УФН, **136**, 435 (1982)
6. Храпко Р. И. Миф об энергии гравитационного поля
   http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=112&module=files

The energy-momentum pseudotersor of the gravitational field is a mistake

Radi I. Khrapko

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Russia

It is shown that the use of the energy-momentum pseudotersor of the gravitational field when calculating increases mass-energy of a closed system of bodies whereas energy of a gravitational field if such exists, is negative.

08.10.2013

Добавление

Эта статья была отклонена следующими журналами:

ТМФ July 30, 2013
Ваша статья не представляет интереса для журнала ТМФ и не может быть опубликована.
Отв. Секретарь **В.В.Жаринов**

УФН August 21, 2013
Дискуссионные заметки в журнале УФН публикуются в исключительных случаях (см. «От редакционной коллегии» УФН т. 183, № 1, 2013). Мы считаем публикацию Вашего Письма в редакцию нецелесообразным.
Зам. главного редактора академик РАН **О.В. Руденко**

Письма ЖЭТФ
Статья проигнорирована.

Ответ автора
Глубокоуважаемые редакции, напрасно академики О.В. Руденко, А.А. Логунов, А.Ф. Андреев уклоняются от обсуждения проблемы псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля. Как написал академик Л.Д. Фаддеев, «Понятие энергии играет центральную роль в современной теоретической физике. Понятие энергии связано с фундаментальной структурой пространства-времени. Характерным свойством энергии является ее положительность, отражающая устойчивость физической системы» [1]. Однако, как выяснилось, в научном сообществе отсутствует понимание проблемы гравитационной энергии. Ни одна редакция не решилась рецензировать статьи [2-4], кроме редакции GRG, чья рецензия оказалась неграмотной.

[1] Фаддеев Л.Д. Проблема энергии в теории тяготения Эйнштейна. УФН, **136**, 435 (1982)
[2] Храпко Р.И. Миф об энергии гравитационного поля
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=112&module=files
[3] Храпко Р.И. Псевдотензор гравитационного поля – ошибка
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=113&module=files
[4] Khrapko R.I. The energy-momentum pseudo-tensor of the gravitational field is a mistake
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=114&module=files http://viXra.org/abs/1308.0151

GRG September 01, 2013:
“The paper under consideration provides an explicit example of a well-known fact, namely that the energy-momentum pseudo-tensor does not provide an invariant means for calculating the energy-mometum contribution due to the gravitational field. It is dependent on the coordinate system, or more precisely on the reference frame used. So while I believe that the paper is correct I do not think that it contributes anything new and therefore, I suggest that it be rejected.” **Abhay Ashtekar**
My reply is:
Dear Abhay Ashtekar, Sorry, Your Reviewer is not correct when he writes “that the energy-momentum pseudo-tensor does not provide an invariant means for calculating the energy-mometum contribution due to the gravitational field. It is dependent on the coordinate system, or more precisely on the reference frame used”.
In reality, as is well known, the energy-momentum pseudo-tensor DOES provide an invariant means for calculating the energy-mometum contribution due to the gravitational field. It is INDEPENDENT on the coordinate system, or more precisely on the reference frame used. For example,

Tolman wrote:
"t_μ^ν is a quantity which is defined in all systems of coordinates by (87.12), and the equation is a covariant one valid in all systems of coordinates. Hence we may have no hesitation in using this very beautiful result of Einstein".
Landau & Lifshitz wrote:
"The quantities P^i (the four-momentum of field plus matter) have a completely define meaning and are independent of the choice of reference system to just the extent that is necessary on the basis of physical considerations".
Tolman wrote:
"It may be shown that the quantities J_μ are independent of any changes that we may make in the coordinate system inside the tube, provided the changed coordinate system still coincides with the original Galilean system in regions outside the tube. To see this we merely have to note that a third auxiliary coordinate system could be introduced coinciding with the common Galilean coordinate system in regions outside the tube, and coinciding inside the tube for one value of the 'time' x^4 (as given outside the tube) with the original coordinate system and at a later 'time' x^4 with the changed coordinate system. Then, since in accordance with (88.5) the values of J_μ would be independent of x^4 in all three coordinate systems, we can conclude that the values would have to be identical for the three coordinate systems".
So you need to use another Reviewer.

Classical and Quantum Gravity September 11, 2013
"We do not publish this type of article in any of our journals and so we are unable to consider your article further".
John Fryer, Ben Sheard, Adam Day, Martin Kitts.

New Journal of Physics September 17, 2013
"We are unable to consider the article for our journal as it has previously been rejected".
Kryssa Roycroft and Joanna Bewley.

PRD October 11, 2013
"Your manuscript only refers to work written more than sixty years ago, and ignores the considerable relevant work since then that is related to an understanding of the issues and difficulties associated with local and global concepts of energy in gravitating systems in a (necessarily) curved spacetime". **Erick J. Weinberg.**
My reply is:
Dear Erick J. Weinberg, All works written during the sixty years on this topic are founded on the first work by Einstein, Eddington, Tolman. All these works developed the Einstein's work, interpreted it or modernized it. In contrast, my paper argues that the first work is trivially invalid owing to a simple mistake, namely, a covariant component of the energy-momentum vector, instead of mass, was calculated in the work, and this component has no sense. Thus all works, which take the first work seriously, are of no interest.