Замечание
об «Угловой импульс сильно сфокусированного гауссова луча»
J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 10 (2008) 115005

Перевод статьи

Note about "Angular momentum of a strongly focused Gaussian beam",
J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 10 (2008) 115005

Radi I. Khrapko

Введение для российских читателей

Довольно старая статья Nieminen *et al* (2008) обратила на себя внимание, поскольку на неё была сделана ссылка на форуме https://groups.google.com/forum/#!forum/sci.physics.electromag в теме «Классический спин в электродинамике неопровержим». Интрига заключается в том, что, согласно современной парадигме (см., напр., Ohanian (1986)), простой световой пучок круговой поляризации содержит только спин, который реализуется циркулляцией массы-энергии по поверхности пучка. Это вращение массы-энергии интерпретируется физиками именно как спин, S, а не как орбитальный момент импульса, L = 0. Так что полный момент импульса J = L + S = S. И тут вдруг оказалось, что в упомянутой статье утверждалось совсем противоположное: «**Орбитальный** угловой импульс вокруг оси пучка обычно ассоциируется с оптическим вихрем и сопровождается азимутальным потоком энергии»[1].

Такое утверждение было сделано авторами при фокусировке светового пучка линзой. Авторы связали **орбитальный** момент импульса с упомянутым азимутальным потоком массы-энергии после прохождения пучком линзы, хотя до прохождения пучком линзы авторы интерпретировали упомянутый азимутальный поток массы-энергии обыкновенно как спин[2]. В результате, авторы заявили, что линза превращает спин в орбитальный момент импульса[3]. Это дало повод для настоящей статьи, подходящим названием для которой является

Спин и орбитальный момент импульса сохраняются по отдельности

Аннотация

Показано, что фокусировка пучка света круговой поляризации не изменяет потоков энергии и спина, а также момента импульса, который есть орбитальный момент импульса.

Ключевые слова: спин электродинамики, круговая поляризация, законы сохранения

Согласно Nieminen *et al* (2008), фокусирование пучка круговой поляризации с помощью симметричной линзы преобразует часть спина, содержащегося в пучке, в орбитальный момент импульса. Однако, давайте учтем сохранение мощности пучка, то есть потока энергии $N = \int f^i da_i$, при прохождении через линзу (буквой $\mathbf{f} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ Becker (1964) обозначил вектор Пойнтинга). Это сохранение влечет за собой сохранение z-компоненты вектора Пойнтинга f^z, если в качестве поверхностей интегрирования используются xy-плоскости, a_1, a_2 (см. рис. 1),

$$N = \int_{a_1} f^z da_z = \int_{a_2} f^z da_z \, . \qquad (1)$$

---

[1] Orbital angular momentum about a beam axis is typically associated with an optical vortex, and accompanied by an azimuthal flow of energy.

[2] A circularly polarized paraxial Gaussian laser beam carries $\pm\hbar$ angular momentum per photon as spin, with zero orbital angular momentum.

[3] [A part] of the original spin is converted to orbital angular momentum, manifesting itself as an optical vortex at the focus.

И это сохранение влечет увеличение модуля вектора Пойнтинга, если в качестве поверхности интегрирования выбрать часть сферы a_3.

$$N = \int_{a_1} f^z da_z = \int_{a_2} f^z da_z = \int_{a_3} f^i da_i \,. \qquad (2)$$

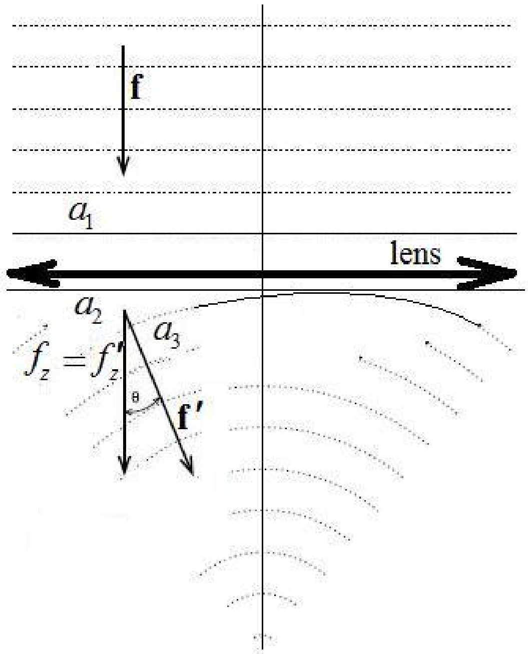

Рис. 1. Уменьшение поверхности интегрирования a_3 по сравнению с поверхностью a_1 обуславливает увеличение модуля вектора Пойнтинга $\mathbf{f}$

Однако в волне круговой поляризации объемная плотность спина, $\mathbf{s} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}$, пропорциональна вектору Пойнтинга $\mathbf{f}$: $\mathbf{s} = \mathbf{f} / \omega c$, см. Poynting (1909). Поэтому s_z, z-компонента плотности спина, сохраняется неизменной при прохождении через линзу так же, как и f^z. Мы поправляем figure 1 from Nieminen *et al* (2008).

Сохранение мощности можно выразить в терминах максвелловского тензора $T^{\alpha\beta}$, потому что этот тензор определяет 4-импульс в элементе 4-объема: $dp^\alpha = T^{\alpha\beta} dV_\beta$; и компонента dp^t являетя массой [kg].

Поток энергии N не зависит от поверхности интегрирования a,

$$N = \int_a f^i da_i = c^2 \int_a T^{ti} da_i = \mathrm{Const}(a) \ \text{[J/s]}, \qquad (3)$$

поскольку $\partial_i T^{ki} = 0$. Это справедливо и для гауссового луча

Теперь рассмотрим поток спина, то есть (спиновый) момент силы, $dS^{ij} / dt = \tau^{ij}$ [J]. Поток спина нельзя выразить в терминах максвелловского тензора (см. e.g. Khrapko (2008)). Спин определяется через *тензор спина* (см. e.g. Rohrlich (1965)[4]); тензор спина определяет 4-спин $dS^{\mu\nu}$ в элементе 4-объема dV_α. Со времени Khrapko 2 (2001) мы обзначаем тензор спина через $\Upsilon^{\mu\nu\alpha} = \Upsilon^{[\mu\nu]\alpha}$, так что $dS^{\mu\nu} = \Upsilon^{\mu\nu\alpha} dV_\alpha$. Компонента dS^{ij} [J.s] представляет обыкновенный спин. Компонента Υ^{ijt} являетя объемной плотностью спина: $dS^{ij} = \Upsilon^{ijt} dV_t$. Согласно Rohrlich (1965), $\Upsilon^{ijt} = 2\varepsilon_0 A^{[i} E^{j]}$, $\mathbf{s} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}$ [J.s/m^3].

---

[4] Rohrlich write: “We could associate $$S^{\alpha\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi c}(F^{\alpha\mu} A^\nu - F^{\alpha\nu} A^\mu) \qquad (4\text{-}150)$$
with the spin angular momentum”

Мы интересуемся потоком S_z-компоненты спина через xy-плоскость. Этот поток определяется компонентой Υ^{xyz} тензора спина, и этот поток не зависит от поверхности интегрирования. Действительно,

$$\frac{dS_z}{dt} = \frac{dS^{xy}}{dt} = \int_a \Upsilon^{xyz} da_z = \mathrm{Const}(a)\ \text{[J]}, \tag{4}$$

потому что отсутствуют источники спина в луче, $\partial_k \Upsilon^{ijk} = 0$, и поэтому $\oint \Upsilon^{ijk} da_k = 0$.

Мы ассоциируем спин с круговой поляризацией света. Поэтому круговая поляризация не изменяется при фокусировке луча.

Поток момента импульса, то есть поток орбитального момента импульса возникает из элементов $d\mathbf{L}/dt = \mathbf{r}\times d\mathbf{F}$, где $d\mathbf{F} = T^{iz}da_z$ [N] представляет касательную силу, действующую на элемент da_z xy-плоскости. Эти касательные силы существуют только вблизи границы луча, где вращающийся поток массы-энергии означает существование момента импульса, направленного вдоль луча (см. (9) ниже). Такой вывод согласуется с результатом Ohanian (1986). Именно, в волне ограниченного поперечного размера $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ поля имеют продольные компоненты (силовые линии замкнуты), и поток энергии имеет поперечную компоненту.

Поток орбитального момента импульса также не зависит от поверхности интегрирования:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{dL^{xy}}{dt} = 2\int_a r^{[x}T^{y]z} da_z = \mathrm{Const}(a)\ \text{[J]}, \tag{5}$$

потому что $\partial_k(r^{[i}T^{j]k}) = 0$. Заметьте, z-компонента орбитального момента импульса не зависит от точки вычисления, потому что x&y-компоненты импульса равны нулю, $p^x = p^y = 0$.

Подобное сохранение мощности, потока спина dS_z/dt и потока орбитального момента мимпульса dL_z/dt наблюдается и в излучении вращающегося диполя, как было показано Khrapko (2003). Эти величины не зависят от (замкнутой) поверхности интегрирования:

$$N = \frac{\omega^4 \mathrm{d}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3},\quad \frac{dS_z}{dt} = \frac{\omega^3 \mathrm{d}^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3},\quad \frac{dL_z}{dt} = \frac{\omega^3 \mathrm{d}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}. \tag{6}$$

Здесь d [C.m] есть дипольный момент. Между прочим, результат (6) частично поддержан в работе Nieminen *et al* (2008)[5].

Заметьте, Khrapko (2003) использует тензор спина

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = (A^{[\lambda}\partial^{|\nu|}A^{\mu]} + \Pi^{[\lambda}\partial^{|\nu|}\Pi^{\mu]}), \tag{7}$$

взятый из Khrapko 2 (2001), вместо канонического тензора спина Rohrlich'a (4-150). В (7) A^λ и Π^λ суть магнитный и электрический векторные потенциалы, удовлетворяющие $2\partial_{[\mu}A_{\nu]} = F_{\mu\nu}$, $2\partial_{[\mu}\Pi_{\nu]} = -e_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}$.

Мы можем оценить скорость азимутального потока массы-энергии в луче круговой поляризации. Эта скорость равна отношению плотности азимутального импульса к плотности массы:

$$v^i = \frac{T^{it}}{T^{tt}}. \tag{8}$$

Как известно, z-компонента объемной плотности орбитального момента импульса дается выражением

$$l_z = -\varepsilon_0 r\partial_r E_0^2(r)/2\omega\ \text{[J.s/m}^3\text{]}, \tag{9}$$

[5] "$S_z = 0.5P/\omega$ for a dipole radiation field (Humblet 1943, Crichton and Marston 2000)".

см., например, Allen *et al* (1999), Zambrini *et al* (2005). Объемная плотность энергии в этом луче равна

$$w = \varepsilon_0 E_0^2 \ [\mathrm{J/m^3}]. \tag{10}$$

Это позволяет найти искомое отношение

$$\frac{l_z}{w} = -\frac{r\partial_r E_0^2(r)}{2\omega E_0^2(r)}. \tag{11}$$

Значит, скорость равна

$$v = \frac{T^{it}}{T^{tt}} = \frac{\partial_r E_0^2(r)}{2\omega E_0^2(r)} c^2 = \frac{\lambda \partial_r E_0^2(r)}{4\pi E_0^2(r)} c. \tag{12}$$

Профиль гауссового луча даетя выражением

$$E_0^2(r) \propto \exp(-2r^2 / w^2) \tag{13}$$

(с этого места w обозначает, как обычно, «радиус» луча, а не плотность энергии). Полагая $\partial_r E_0^2(r) / E_0^2(r) \approx 4/w$, мы получаем

$$v_{\max} \approx \frac{\lambda}{\pi w} c, \quad \Omega_{\max} \approx \frac{v}{w} = \frac{\lambda^2}{2\pi^2 w^2} \omega, \tag{14}$$

где v and Ω суть азимутальная скорость и угловая скорость массы-энергии, соответтвенно.

Вывод

В рассматриваемом луче круговой поляризации присутствуют спин *и* орбитальный момент импульса. Эти угловые импульсы сохраняются по отдельности при изменении радиуса луча. Отсутствует взаимодействие между спином и орбитальным моментом импульса

Благодарности

Я глубоко благодарен профессору Robert H. Romer за отважную публикацию вопроса Khrapko 1 (2001) (направлено 7 October 1999) и профессору Timo Nieminen за содержательные дискуссии (forum/sci.physics.electromag).

Литература

Allen, L.; Padgett, M.J.; Babiker, M. The orbital angular momentum of light. *Progress in Optics XXXIX*; Elsevier: Amsterdam, 1999, p 299.

Becker R., Electromagnetic Fields and Interactions, V. 2, p.96 (NY, Dover, 1964)

Khrapko R. I. (1) "Does plane wave not carry a spin?" *Amer. J. Phys*. **69**, 405 (2001) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=10&module=files

Khrapko R. I. (2) "True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero". http://arXiv.org/abs/physics/0102084 (2001)

Khrapko R. I. "Radiation of spin by a rotator," http://www.ma.utexas.edu/cgi-bin/mps?key=03-315 (2003)

Khrapko R. I. "Mechanical stresses produced by a light beam" J. Modern Optics, 55, 1487-1500 (2008) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?module=files&id=9

Nieminen T. A. et al., "Angular momentum of a strongly focused Gaussian beam," J. Opt. A: Pure Appl. Opt. 10 (2008) 115005 (6pp); physics/0408080. http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=117&module=files

Ohanian H. C., "What is spin?" Amer. J. Phys. 54, 500-505 (1986) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=120&module=files

Poynting, J. H., 1909. "The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light". Proc. R. Soc. Lond. A 82, 560-567.

Rohrlich F., "Classical Charged Particles" (Addison-Wesley, Mass. 1965)

Zambrini, R.; Barnett, S.M. "Local transfer of optical angular momentum to matter". *J. Mod. Opt*. **52**: (2005) 1045–1052.