Письмо в редакцию

# Гравитационная масса эквивалентна инертной массе

Р. И. Храпко*
*Московский авиационный институт, Москва, 125993*

Вопреки распространенному мнению, что гравитационная масса вертикально падающего фотона в два раза меньше, чем летящего горизонтально, при одинаковой их инертной массе, показано, что гравитационная масса совпадает с инертной массой. Из методических соображений рассмотрение ограничено вертикальным и горизонтальным движениями.

PACS 04.20.-q

## 1. Введение

Совпадение гравитационной и инертной массы тела было показано Галилеем, когда он, согласно биографу, ронял два разных тела с Пизанской башни. Тела падали на землю за одно и то же время. Это означало,что ускорение свободного падения не зависело от (массы) тела, что противоречило теории Аристотеля, согласно которому скорость падения зависела от массы тела.

Эксперимент Галилея показал, что гравитационная масса, $m_g$, которая определяет гравитационную силу притяжения

$$F = GMm_g / r^2 \equiv m_g g\,, \tag{1}$$

совпадает с инертной массой, $m_i$, которая определяет ускорение в случае нулевой скорости, $v = 0$,

$$F = m_i a\,. \tag{2}$$

Действительно, если $m_g = m_i$, то после приравнивания сил $m_g g = m_i a$ массы сокращаются, и мы имеем $g = a$ для любого тела.

Это совпадение является фундаментом общей теории относительности Эйнштейна (ОТО), поскольку показывает, что мировая линия (пробного) тела в гравитационном поле не зависит от тела, а определяется самим пространством-временем, его геометрическим свойством (у пространства-времени нет никаких свойств, кроме геометрического). Так что это совпадение привело к геометризации гравитационного поля, к фактической ликвидации понятия гравитационного поля. Заметьте, что использование пространства-времени не является возвращением к понятию эфира, поскольку эфир есть фикция, а пространство-время – реально.

Совпадение гравитационной и инертной массы лежит в фундаменте ОТО. Поэтому оно выполняется в рамках ОТО автоматически, не зависимо от скорости движения пробного тела, а ОТО всегда согласуется с экспериментом. Однако это фундаментальное совпадение неоднократно отрицалось в научной литературе. Поэтому нам представляется уместной простая демонстрация совпадения гравитационной и инертной массы при любой скорости движения пробного тела. При этом, видимо, в этой короткой методической заметке будет достаточно рассмотреть только радиальное и азимутальное движение тела (по отношению к источнику гравитационного притяжения).

## 2. Радиальное движение

В пространстве-времени с координатами Шваршильда $t, r$ и метрикой

$$ds^2 = \frac{r-1}{r}dt^2 - \frac{r}{r-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \tag{3}$$

* Email: khrapko_ri@hotmail.com, http://khrapkori.wmsite.ru

(положим $c = r_g = 2M = 1$) рассмотрим радиальную геодезическую линию, используя $t$ как параметр: $\{t, r(t)\}$:

$$\frac{D}{dt}\frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha\frac{dx^i}{dt}, \quad \Gamma^t_{tr} = -\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2r(r-1)}, \Gamma^r_{tt} = \frac{r-1}{2r^3}. \tag{4}$$

Здесь правая часть пропорциональна касательному вектору, потому что $t$ не является каноническим параметром. Уравнение (4) дает

для $i = t$: $\Gamma^t_{tr} 2\frac{dr}{dt} \equiv \frac{1}{r(r-1)}\frac{dr}{dt} = \alpha$,

для $i = r$: $\frac{d^2r}{dt^2} + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \Gamma^r_{tt} \equiv \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2r(r-1)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r-1}{2r^3} = \alpha\frac{dr}{dt}$.

Исключая $\alpha$, получаем уравнение геодезической линии:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3}{2r(r-1)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r-1}{2r^3} = 0. \tag{5}$$

Производная $\frac{dr}{dt}$ связана со скоростью:

$$v = \frac{dr}{dt}\sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} = \frac{dr}{dt}\frac{r}{r-1}, \quad g_{tt} = \frac{r-1}{r}, \quad g_{rr} = \frac{r}{r-1}, \tag{6}$$

а вторая производная $\frac{d^2r}{dt^2}$ связана с ускорением:

$$a = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\frac{r}{r-1}\right) = \sqrt{\frac{r}{r-1}}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\frac{r}{r-1} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\frac{1}{(r-1)^2}\right). \tag{7}$$

Подставляя сюда вторую производную из (5) и первую производную из (6), получим

$$a = \frac{1}{2r^2}\sqrt{\frac{r}{r-1}}(v^2-1) = g(v^2-1). \tag{8}$$

Дело в том, что кривизна мировой линии неподвижного тела (для которого $r = \mathrm{Const}$) равна $\frac{D^2r}{dt^2} = \Gamma^r_{tt} = \frac{r-1}{2r^3}$. А в рамках ОТО неподвижное тело имеет ускорение свободного падения, которое и выражается формулой

$$g = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{g_{tt}}\frac{D^2r}{dt^2} = \frac{1}{2r^2}\sqrt{\frac{r}{r-1}}. \tag{9}$$

Зависимость ускорения от скорости (8) позволяет найти зависимость гравитационной массы от скорости, $m_g(v)$. Действительно, как хорошо известно,

$$F = \frac{m_0 a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^{3/2}}, \tag{10}$$

если ускоряющая сила $F$ параллельна скорости $v$. Здесь $m_0$ есть инвариантная масса. Поэтому, используя гравитационную силу (1) как $F$ в (10), можем записать

$$m_g g = \frac{m_0 a}{\sqrt{1 - v^2/c^2}^{3/2}}, \tag{11}$$

а подставляя (8) в (11), получаем искомое выражение

$$m_g = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{12}$$

которое доказывает, что гравитационная масса совпадает с инертной массой.

**3. Азимутальное движение**

Здесь мы ограничимся рассмотрением круговых орбит. Поэтому для нахождения уравнения геодезической линии, соответствующей круговой орбите, положим в (4) $\frac{dr}{dt} \equiv 0$ и будем иметь только уравнение для $i = r$. Поскольку $\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -(r-1)\sin^2\theta = -(r-1)$, получаем для круговой орбиты

$$\Gamma^r_{tt} + \Gamma^r_{\varphi\varphi}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0, \quad \frac{r-1}{2r^3} = (r-1)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2r^3}. \tag{13}$$

Нетрудно подсчитать, что при $r = 3/2$ эта геодезическая линия делается изотропной, то есть представляет орбиту фотона. Действительно, с учетом (13), получается

$$ds^2 \equiv \frac{r-1}{r}dt^2 - r^2 d\varphi^2 = \left(\frac{r-1}{r} - \frac{r^2}{2r^3}\right)dt^2 = 0, \quad r = \frac{3}{2}. \tag{14}$$

Мировая линия (13) является геодезической линией пространства-времени, которая представляет движение по окружности в пространстве. Центростремительное ускорение такого движения определяется второй производной по времени радиального отклонения этой окружности, $r = \mathrm{Const}$, от касательной *геодезической* линии пространства с метрикой

$$dl^2 = \frac{r}{r-1}dr^2 + r^2 d\varphi^2 \tag{15}$$

Уравнение такой геодезической линии, $r(\varphi)$, мы сейчас найдем. Используя общее уравнение (4) и учитывая, что для касательной линии в точке $\varphi = 0$ будет $dr/d\varphi = 0$, получаем теперь при $\varphi = 0$, $i = r$:

$$\frac{d^2r}{d\varphi^2} + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{d^2r}{d\varphi^2} - (r-1) = 0, \quad \frac{d^2r}{d\varphi^2} = (r-1). \tag{16}$$

Это уравнение и дает искомую вторую производную радиального отклонения круговой орбиты от геодезической линии. Вторая производная по времени получается с использованем (13):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{(r-1)}{2r^3}. \tag{17}$$

Теперь можем найти центростремительное ускорение на любой круговой орбите, которое оказывается равным обычному $g$.

$$a = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{g_{tt}}\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{2r^2}\sqrt{\frac{r}{r-1}} = g. \tag{18}$$

**4. Заключение**

Двойное отклонение луча света вблизи притягивающего центра, предсказанное Эйнштейном и хорошо зафиксированное, происходит не потому, что на фотон действует двойная гравитационная сила из-за того, что у него в этих условиях двойная гравитационная масса. У фотона обычная гравитационная масса, совпадающая с инертрой массой (которую любят называть «энергией, деленной на $c^2$»). Фотон испытывает обычное для всех ускорение свободного падения. Вторая половина отклонения обусловлена кривизной пространства.

**Gravitational mass is equivalent to inertial mass**

Radi Khrapko
*Moscow Aviation Institute - Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia*

Despite a widespread opinion that the gravitational mass of a vertically falling photon is half of the gravitational mass of a horizontally moving photon, it is shown that the gravitational mass is coincided with the inertial mass. The consideration is restricted to vertical and horizontal movements only.

**Российская академия наук**
**Редакция журнала *“Успехи физических наук”***
119991, Москва, Ленинский пр-т, 53 .
Тел. (499)132-62-65. Тел/Факс (499) 190-4244, 132-6348.
E-mail: ufn@ufn.ru

**30 декабря 2014 г.** **Храпко Р.И.**

Глубокоуважаемый Радий Игоревич!

Благодарим Вас за внимание к журналу УФН. Однако, в связи с тем, что в Вашей статье «Гравитационная масса эквивалентна инертной массе» сообщается о новых результатах, не опубликованных пока ещё в специализированном научном журнале, мы не можем принять к публикации Вашу заметку.

От имени и по поручению редколлегии
журнала «Успехи физических наук»
Заместитель главного редактора
академик РАН О.В. Руденко

Глубокоуважаемый Олег Владимирович!

Благодарю за рассмотрение моего письма в редакцию УФН «Гравитационная масса эквивалентна инертной массе» http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=131&module=files

К сожалению, Вы сообщили мне удивительное решение!
На самом деле, эквивалентность гравитационной и инертной масс установил Галилей в 16 веке. Этот результат ни в коем случае НЕ является новым.
Новым является ошибочный результат опубликованный УФН:
Окунь Л. Б. Понятие массы. // Успехи физических наук. - 1989, т. 158. - с.512-530.

518 Л. Б. ОКУНЬ

можно показать, что в этом случае сила, действующая на легкую частицу, равна

$$\mathbf{F} = -GM\frac{E}{c^2}[(1+\boldsymbol{\beta}^2)\mathbf{r} - (\mathbf{r}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}]r^{-3}. \qquad (8.1)$$

Легко видеть, что для медленного электрона с $\beta \ll 1$ выражение в квадратной скобке сводится к $\mathbf{r}$, и, учитывая, что $E_0/c^2 = m$, мы возвращаемся к нерелятивистской формуле Ньютона. Однако при $v/c \sim 1$ или $v/c = 1$ мы сталкиваемся с принципиально новым явлением: величина, играющая роль «гравитационной массы» релятивистской частицы, оказывается зависящей не только от энергии частицы, но и от взаимного направления векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$. Если $\mathbf{v} \| \mathbf{r}$, то «гравитационная масса» равна $E/c^2$, но если $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$, то она становится равной $(E/c^2)(1+\beta^2)$, а для фотона $2E/c^2$.

Мы используем кавычки, чтобы подчеркнуть, что для релятивистского тела понятие гравитационной массы неприменимо. Бессмысленно говорить о гравитационной массе фотона, если для вертикально падающего фотона эта величина в два раза меньше, чем для летящего горизонтально.

В своей методической заметке я исправляю эту досадную неточность. Повторяю, гравитационная масса электромагнитного излучения существует и всегда равна инертной массе этого излучения.

Пожалуйста, пересмотрите решение редколлегии. Р.И. Храпко, 12.01.15

**Н**иже помещена статья «Зависимость ускорения от скорости в опыте Галилея», отклоненная редакцией УФН. Представлен также Отзыв рецензента на неё и Ответ автора.


**Российская академия наук**

**Редакция журнала «*Успехи физических наук*»**

119991 Москва, Ленинский проспект д. 53

Тел. (499) 132-62-65. Тел./Факс. (499) 190-42-44, (499) 132-63-48.

E-mail: ufn@ufn.ru


---

**№ 5150/1**
**5 декабря 2014 г.**

Р.И. Храпко

Уважаемый Радий Игоревич!

Ваша статья «Зависимость ускорения от скорости в опыте Галилея» была рассмотрена вместе с поступившим на Вашу статью отзывом независимого рецензента.

Учитывая критический характер отзыва, было принято решение отказаться от публикации Вашей статьи в журнале УФН.

Направляем Вам отзыв на Вашу статью.

Главный редактор
журнала «Успехи физических наук»
академик РАН

Л.В. Келдыш

«Зависимость ускорения от скорости в опыте Галилея»

**ОТЗЫВ**

на статью Р.И. Храпко

В заметке обсуждается одно свойство движения во внешнем гравитационном поле в общей теории относительности и в ускоренной системе отсчета.

Подобного рода вопросы подробно освещены в учебниках.

Считаю, что данная методическая заметка не представляет интереса для читателей УФН.

**Ответ автора**

Уважаемая редакция, новый ответ рецензента подтвердил вывод о низком профессионализме рецензентов журнала УФН (см. http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=130&module=files , http://khrapko-ri.livejournal.com/20696.html ). В действительности, зависимость ускорения от скорости в опыте Галилея нигде не «освещена в учебниках». Рецензент голословен. Рецензент не распознал фундаментальное значение представленного результата. Это заставило меня усилить полученный результат в новой статье «Гравитационная масса эквивалентна инертной массе».

# Зависимость ускорения от скорости в опыте Галилея

Ускорение свободного падения не зависит от массы тела с тех пор, как Галилей забрался на Пизанскую Башню. Но Галилей не интересовался зависимостью ускорения свободного падения от ***скорости*** тела. А такая зависимость, естественно, есть. Это ясно уже потому, что, если скорость равна скорости света, то ускорение равно нулю. У меня получилась зависимость $a = g(1 - v^2 / c^2)$.

Составим уравнение для геодезической линии в шварцшильдовском пространстве с координатами $t, r$, используя $t$ как параметр: $\{t, r(t)\}$. Считаем $c = 1$.

$$\frac{D}{dt}\frac{dx^i}{dt} \equiv \frac{d^2x^i}{dt^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = \alpha\frac{dx^i}{dt}, \quad \Gamma^t_{tr} = -\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2r(r-1)}, \Gamma^r_{tt} = \frac{r-1}{2r^3}.$$

В правой части уравнения геодезической стоит не ноль, а величина, пропорциональная касательному вектору, потому что параметр $t$ не является каноническим параметром. Геодезичность линии проявляется в том, что вектор её «кривизны» направлен вдоль самой линии.

При $i = t$: $\Gamma^t_{tr} 2\frac{dr}{dt} \equiv \frac{1}{r(r-1)}\frac{dr}{dt} = \alpha$.

При $i = r$: $\frac{d^2r}{dt^2} + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \Gamma^r_{tt} \equiv \frac{d^2r}{dt^2} - \frac{1}{2r(r-1)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r-1}{2r^3} = \alpha\frac{dr}{dt}$.

Исключая $\alpha$ получаем уравнение геодезической линии:

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{3}{2r(r-1)}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{r-1}{2r^3} = 0.$$

Производная $\frac{dr}{dt}$ связана со скоростью: $v = \frac{dr}{dt}\sqrt{\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} = \frac{dr}{dt}\frac{r}{r-1}, \quad g_{tt} = \frac{r-1}{r}, \quad g_{rr} = \frac{r}{r-1}$,

А вторая производная $\frac{d^2r}{dt^2}$ связана с ускорением:

$$a = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\sqrt{g_{tt}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\frac{r}{r-1}\right) = \sqrt{\frac{r}{r-1}}\left(\frac{d^2r}{dt^2}\frac{r}{r-1} - \left(\frac{dr}{dt}\right)^2\frac{1}{(r-1)^2}\right).$$

Подставляя сюда вторую производную из уравнения геодезической и выражение первой производной через скорость $v$, получим

$$a = \frac{1}{2r^2}\sqrt{\frac{r}{r-1}}(v^2 - 1) = g(v^2 - 1).$$

Дело в том, что для мировой линии покоящегося тела, $r = \mathrm{Const}$, кривизна равна $\frac{D^2r}{dt^2} = \Gamma^r_{tt} = \frac{r-1}{2r^3}$,

и поэтому ускорение покоящегося тела равно $g = \frac{\sqrt{g_{rr}}}{g_{tt}}\frac{D^2r}{dt^2} = \frac{1}{2r^2}\sqrt{\frac{r}{r-1}}$ (буква $g$ обозначает одновременно метрический тензор и нормальное ускорение свободного падения).

Интересно, что такая же зависимость ускорения от скорости свойственна равноускоренной лаборатории в (псевдо) евклидовом пространстве-времени. Метрика координат $\tau, \xi$ такой лаборатории и их связь с галилевыми координатами $t, x$ известны:

$$ds^2 = \xi^2 d\tau^2 - d\xi^2, \quad t = \xi\,\mathrm{sh}\,\tau, \quad x = \xi\,\mathrm{ch}\,\tau.$$

Выражение для геодезической линии равномерно двигающегося тела со скоростью $v_0$ получается в таких координатах после преобразования координат:

$$x = x_0 + v_0 t, \quad \xi\,\mathrm{ch}\,\tau = \xi_0 + v_0\xi\,\mathrm{sh}\,\tau.$$

Затем можно получить скорость и ускорение этого тела относительно этой лаборатории:

$$v = \frac{d\xi}{\sqrt{g_{\tau\tau}}d\tau} = \frac{v_0\mathrm{ch}\tau - \mathrm{sh}\tau}{\mathrm{ch}\tau - v_0\mathrm{sh}\tau}, \quad a = \frac{dv}{\sqrt{g_{\tau\tau}}d\tau} = \frac{v^2 - 1}{\xi}$$