Метрические тензоры энергии-импульса нелегитимны

Р. И. Храпко *
Московский авиационный институт, Москва, 125993

Аннотация

Показано, что известная процедура получения метрических тензоров энергии-импульса, вообще говоря, не приводит к бездивергентным тензорам, а уравнения Эйнштейна не получаются из принципа наименьшего действия.

PACS: 03.50.-z

Вариационный принцип наименьшего действия широко используется в теоретической физике. Однако, на наш взгляд, значение его несколько преувеличено. Мы приводим тому два примера. Хотя уравнение Лагранжа-Эйлера, полученное из вариационного принципа, часто приводит к верному уравнению поля при использовании лагранжиана поля, это не относится к так называемому гравитационному полю. И вариационный принцип не дает адекватные тензоры энергии-импульса и спина

1 Уравнения поля

Свойство классического поля, например 4-векторного вещественного поля $A_i(x)$, задается лагранжианом поля, обычно зависящим от самого поля и его первой производной $\Lambda(A_i, \nabla_j A_i)$. Лагранжиан является скаляром; поэтому при использовании криволинейных координат, производная должна быть ковариантной. Вследствие этого аргументами лагранжиана являются также метрический тензор g^{mn} и его производные, входящие в символы Кристоффеля Γ^k_{ji}: $\Lambda(A_i, \partial_j A_i, g^{mn}, \partial_l g^{mn})$.

Приведем примеры лагранжианов свободного поля, то есть поля без источников:
Лагранжиан простого векторного поля

$$\underset{v}{\Lambda} = -\nabla_j A_i \nabla_k A_l g^{jk} g^{il}/2. \tag{1}$$

Канонический лагранжиан

$$\underset{c}{\Lambda} = -\nabla_{[j} A_{i]} \nabla_{[k} A_{l]} g^{jk} g^{il} = -F_{ji} F_{kl} g^{jk} g^{il}/4, \quad F_{ji} = 2\nabla_{[j} A_{i]} = \partial_{[j} A_{i]}. \tag{2}$$

Канонический лагранжиан замечателен тем, что, несмотря на ковариантность, его составляют частные производные.

Интеграл от ларанжиана по некоторой области Ω называется действием

$$S = \int_\Omega \Lambda \sqrt{-g} d\Omega. \tag{3}$$

*Email: khrapko_ri@mai.ru, khrapko_ri@hotmail.com

При вариации функций поля лагранжиан и действие, вообще говоря, изменяются. Однако существуют такие функции поля, что их произвольные вариации, обращающиеся в ноль на границе области интегрирования, не изменяют действие. Для нахождения подобных функций $A_i(x)$ создают такое выражение для вариации действия, в котором эта вариация пропорциональна вариации функций поля, и приравнивают вариацию действия нулю [1]:

$$\delta S = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} \delta A_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\nabla_j A_i)} \delta (\nabla_j A_i) \right) \sqrt{-g} d\Omega$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} \delta A_i + \frac{\partial \Lambda}{\partial (\nabla_j A_i)} \nabla_j \delta A_i \right) \sqrt{-g} d\Omega$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} \delta A_i - \nabla_j \frac{\partial \Lambda}{\partial (\nabla_j A_i)} \delta A_i \right) \sqrt{-g} d\Omega$$

$$+ \int\limits_{\Omega} \nabla_j \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial (\nabla_j A_i)} \delta A_i \right) \sqrt{-g} d\Omega = 0 \tag{4}$$

Здесь символы δ и ∇ коммутируют. Это дало возможность “перекинуть” производную на первый сомножитель, после чего последнее слагаемое, преобразованное по теореме Гаусса, оказывается равным нулю. В результате получаются *уравнения поля*, называемые уравнениями Лагранжа-Эйлера; они обеспечивают нулевую вариацию действия (3) при вариации поля:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial A_i} - \nabla_j \frac{\partial \Lambda}{\partial (\nabla_j A_i)} = 0 \tag{5}$$

Для лагранжиана (1) это

$$g^{jk} \nabla_j \nabla_k A_i = 0. \tag{6}$$

Для лагранжиана (2) это

$$\nabla_j F^{ij} = 0. \tag{7}$$

2 Метрический тензор энергии-импульса

Кроме уравнений поля, большое значение придается бездивергентному симметричному тензору, составленному из функций поля и его производных, и называемому тензором энергии-импульса $T^{ij}, \quad \nabla_j T^{ij}$. Для его построения предлагается [1] использовать тот факт, что действие (3) не меняется при изменении *координат*, несмотря на сопутствующие изменения выражений для функций поля, метрического тензора и его производных, лагранжиана в целом и области интегрирования. Бездивергентные тензоры, полученные с помощью простой вариации системы координат, называются метрическими тензорами энергии-импульса.

Целесообразно ограничиться инфинитезимальными вариациями координат, исчезающими на границе области, что обеспечивает неизменность области интегрирования при изменении системы координат. Тогда для вариации действия справедливо выражение

$$\delta S = \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial A_i} \delta A_i + \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial (\nabla_j A_i)} \delta (\nabla_j A_i) + \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial g^{mn}} \delta g^{mn} + \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial (\partial_l g^{mn})} \delta \partial_l g^{mn} \right) \sqrt{-g} d\Omega \tag{8}$$

Поскольку лагранжиан явно не зависит от координат, вариация действия оказывается выражена не через вариации координат, а через изометрические вариации метрического тензора, его производные, вариации функций поля и их производные, которые обусловлены вариацией координат. Следует, однако, учитывать, что вариация производной $\delta(\nabla_j A_i)$ в формуле (8), обусловленная вариацией координат, отличается от вариации производной в формуле (4), возникающей при вариации самого поля . Действительно, в формуле (8) имеем:

$$\delta(\nabla_j A_i) = \delta(\partial_j A_i - \Gamma^k_{ji} A_k) = \partial_j \delta A_i - \delta\Gamma^k_{ji} A_k - \Gamma^k_{ji}\delta A_k = \nabla_j \delta A_i - \delta\Gamma^k_{ji} A_k, \tag{9}$$

$$\delta\Gamma^k_{ji} = \frac{\partial\Gamma^k_{ji}}{\partial g^{mn}}\delta g^{mn} + \frac{\partial\Gamma^k_{ji}}{\partial(\partial_l g^{mn})}\delta(\partial_l g^{mn}). \tag{10}$$

Символы δ и ∇ не коммутируют при вариации координат, а потому при подстановке формулы (4) в формулу (8) в интегранде формулы (8) остается лишний член,

$$-\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial(\nabla_j A_i)}\delta\Gamma^k_{ji} A_k, \tag{11}$$

по сравнению с соответствующей формулой из [1, §94]. В результате, при учете (10), вариацию действия следует записать в виде

$$\delta S = \int\limits_\Omega \left(-\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial(\nabla_j A_i)}\frac{\partial\Gamma^k_{ji}}{\partial g^{mn}} A_k + \partial_l[\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial(\nabla_j A_i)}\frac{\partial\Gamma^k_{ji}}{\partial(\partial_l g^{mn})} A_k] + \frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g^{mn}} - \partial_l\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial(\partial_l g^{mn})}\right)\delta g^{mn} d\Omega. \tag{12}$$

Равенство нулю такой вариации, вообще говоря, не означает, что конструкция [1, (94,4)]

$$T_{mn} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial g^{mn}} - \partial_l\frac{\partial\Lambda\sqrt{-g}}{\partial(\partial_l g^{mn})}\right), \tag{13}$$

использующая только два последних члена интегранда, окажется бездивергентной, как это доказывается в [1, §94].

И действительно, используем в конструкции (13) лагранжиан (1). Учитывая, что

$$\frac{2\partial\sqrt{-g}}{\sqrt{-g}\partial g^{mn}} = -g_{mn}, \tag{14}$$

и считая, что исходная метрика декартова, найдем тензор по формуле (13)

$$\underset{v}{T}_{mn} = g_{mn}\partial_j A_i \partial^j A^i/2 - \partial_m A_i \partial_n A^i - \partial_i A_m \partial^i A_n. \tag{15}$$

Дивергенция этого тензора не равна нулю:

$$\partial^n \underset{v}{T}_{mn} = \partial_{mj} A_i \partial^j A^i/2 + \partial_j A_i \partial^j_m A^i/2 - \partial^n_m A_i \partial_n A^i - \partial_m A_i \partial^n_n A^i - \partial^n(\partial_j A_m \partial^j A_n) \neq 0; \tag{16}$$

первые три члена взаимно уничтожаются, четвертый равен нулю в силу (6), а последний член остается не уничтоженным.

Так что тензор (13) не может, вообще говоря, представлять поле или вещество, а разобранный здесь известный метод получения так называемых симметричных бездивергентных метрических тензоров энергии-импульса – нелегитимен.

3 Уравнения Эйнштейна

Существенно, что некорректное неполное выражение вариации действия материи, представляющее собой часть выражения (12) и содержащее не обязательно бездивергентный тензор (13) [1, (94,5),(95,4)],

$$\delta S = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial g^{mn}} - \partial_l \frac{\partial \Lambda \sqrt{-g}}{\partial(\partial_l g^{mn})} \right) \delta g^{mn} d\Omega = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega T_{mn} \delta g^{mn} \sqrt{-g} d\Omega, \tag{17}$$

используется в дальнейшем для вывода уравнений Эйнштейна [1, (95,5)].

Сначала рассматривается действие поля метрического тензора g^{ik} [1, (93,1)]

$$S_g = -\frac{1}{2\kappa} \int_\Omega R \sqrt{-g} d\Omega. \tag{18}$$

Далее, для вариации суммы действий поля и материи,

$$\delta S_{tot} = \delta S_g + \delta S = -\frac{1}{2\kappa} \int_\Omega \delta(R\sqrt{-g}) d\Omega + \frac{1}{2} \int_\Omega T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega, \tag{19}$$

создают такое выражение, в котором интегранд пропорционален вариации метрического тензора. Затем приравнивают нулю эту вариацию суммы при произвольной инфинитезимальной вариации метрического тензора, исчезающей на границе области интегрирования. И в результате, бездивергентный тензор Эйнштейна оказывается приравнен к не обязательно бездивергентному тензору (13) [1, (95,5)]:

$$R_{ik} - g_{ik} R/2 = \kappa T_{ik}. \tag{20}$$

Для выяснения причины этого парадокса рассмотрим преобразование вариации действия поля δS_g, которое должно привести, по идее, к интегранду, пропорциональному вариации метрики [1, (95,1)]:

$$\delta S_g = -\frac{1}{2\kappa} \int_\Omega (R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega - \frac{1}{2\kappa} \int_\Omega g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \tag{21}$$

Следует, однако, учитывать, что вариация тензора Риччи, δR_{ik}, отличается от вариации символов Кристоффеля, $\delta \Gamma^k_{ji}$. Вариации символов Кристоффеля выражается через вариацию производной метрического тензора (10) и преобразуется теоремой Гаусса в вариацию самого метрического тензора δg^{ik} на границе области интегрирования, где она равна нулю. Вариация тензора Риччи δR_{ik} выражается через вариацию производной символов Кристоффеля, а потому теорема Гаусса приводит к вариации самих символов Кристоффеля на границе области интегрирования, где эта вариация не равняется нулю при произвольной вариации метрического тензора внутри области интегрирования

$$\int_\Omega g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int_\Omega 2\partial_l (g^{i[k} \delta \Gamma^{l]}_{ik} \sqrt{-g}) d\Omega = \oint_{\partial\Omega} 2 g^{i[k} \delta \Gamma^{l]}_{ik} \sqrt{-g} dV_l. \tag{22}$$

Поэтому, приравнивая нулю вариацию суммы действий (19),

$$\delta S_{tot} = -\frac{1}{2\kappa} \int_\Omega [(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R) - \kappa T_{ik}] \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega - \frac{1}{\kappa} \oint_{\partial\Omega} g^{i[k} \delta \Gamma^{l]}_{ik} \sqrt{-g} dV_l = 0, \tag{23}$$

нельзя сделать никакой вывод, касающийся подынтегральных выражений, нельзя сделать вывод о справедливости равенства (20) с тензором (13) в качестве правой части. Это согласуется с тем, что тензор (13) не обязательно бездивергентный.

4 Заключение

Представленные результаты демонстрируют, что Принцип наименьшего действия имеет ограниченное применение. Ранее уже было показано, что Принцип не приводит к тензору энергии-импульса Максвелла-Минковского и дает неправильный тензор спина классической электродинамики [2]. Неправильным является также псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля [3]. Выражаю благодарность В.В. Карбановскому, случайно обратившему мое внимание на некорректный вывод уравнения Эйнштейна.

Список литературы

[1] Landau L. D., Lifshitz E. M. The Classical Theory of Fields. (Pergamon, N. Y. 1975).

[2] Khrapko R.I. "Mechanical stresses produced by a light beam" J. Modern Optics, 55, 1487-1500 (2008)

[3] Khrapko R.I. “The Truth about the Energy-Momentum Tensor and Pseudotensor”. Gravitation and Cosmology, 20, 4 (2014), p. 264.