Правда о псевдотензоре энергии-импульса гравитационного поля

Р.И. Храпко*

Показано, что псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля, призванный описывать отрицательную потенциальную гравитационную энергию, - положителен. А потому он бесполезен

Кючевые слова: гравитация, энергия, полевая концепция, ковариантность

PACS number: **04.20.Cv**

1. Введение

"Согласно теории относительности, инертная масса замкнутой системы (система рассматривается как целое) определяется ее энергией. Согласно постулату о равенстве инертной и тяжелой масс, то же самое должно быть справедливым для тяжелой массы. Следовательно, если состояние системы изменяется произвольно, но так, чтобы полная энергия ее не менялась, то гравитационное дальнодействие системы не меняется, даже если часть энергии системы переходит в гравитационную энергию. Тяготеющая масса системы определяется ее полной энергией, включая ее гравитационную энергию" [1]. Это известное высказывание иллюстрируется теоремой Биркгоффа, по которой радиальные пульсации изолированного сферического материального объекта не изменяют его внешнее гравитационное поле, которое характеризуется шварцшильдовской константой m . Тем не менее, это высказывание необходимо несколько изменить, поскольку, видимо, неуместно говорить, что часть энергии системы *переходит* в энергию гравитационного поля. Ведь гравитационное поле усиливается тогда, когда, наоборот, *увеличивается* энергия материальной системы, например, при ее сжатии.

Действительно, рассмотрим (пылевое) облако, окруженное собственным гравитационным полем. В процессе сжатия частицы облака приобретают кинетическую энергию. От этого масса-энергия облака увеличивается (положительный дефект массы). Но и гравитационное поле облака при этом усиливается, распространяясь на освобожденную облаком территорию. Поэтому, ввиду постоянства шварцшильдовского параметра m , гравитационному полю приходится приписывать *отрицательную* потенциальную массу-энергию для того, чтобы общая масса-энергия **сохранялась** неизменной.

В этом отношении гравитационное поле (если таковое существует) принципиально отличается от других физических полей, от электрического, в частности. Когда электрон, притягиваясь к протону, приобретает кинетическую энергию, энергия электрического поля *уменьшается*. Она действительно *переходит* в кинетческую энергию, и это обеспечивает сохранение энергии материи всей системы "электрон + протон + их электрическое поле". В разделе 2 показано, что это сохранение математически выражается равенством [2 (33,6)], которое для произвольной (криволинейной) системы координат записывается в виде [2 (94,7)], [2 (96,1)], [3 (84.7)], [4 (341a)]

$$\nabla_k (\underset{p}{T}{}_i^k \sqrt{-g} + \underset{f}{T}{}_i^k \sqrt{-g}) \equiv \nabla_k (T_i^k \sqrt{-g}) \equiv \partial_k (T_i^k \sqrt{-g}) - \Gamma_{im}^n T_n^m \sqrt{-g} = 0, \qquad (1.1)$$

где $\underset{p}{T}{}_i^k$ есть тензор энергии-импульса (ЭИ) частиц, $\underset{f}{T}{}_i^k$ есть тензор ЭИ электрического поля, а $T_i^k = \underset{p}{T}{}_i^k + \underset{f}{T}{}_i^k$ есть тензор ЭИ материи (вещество + поле). Отметим, что, странным образом,

* Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет).
Волоколамское шоссе 4, 125993 Москва, Российская Федерация
E-mail: khrapko_ri@hotmail.com, http://khrapkori.wmsite.ru

авторы указывают на равенство (1.1) только "при наличии гравитационного поля", то есть только для искривленного пространства-времени.

В силу (1.1) ЭИ материи сохраняется лишь в плоском пространстве-времени. В разделе 2 указано, что в искривленном пространстве-времени, вообще говоря, не возможно точное определение ЭИ протяженной материальной системы и поэтому, несмотря на справедливость равенства (1.1), нельзя говорить о ее сохранении или несохранении. Указаны два исключения.

Закон сохранения полного ЭИ замкнутой системы "материя + гравитационное поле" выражается нековариантным равенством [3 (87.14)] [4 (406)]

$$\partial_k (T_i^k \sqrt{-g} + t_i^k \sqrt{-g}) = 0. \tag{1.2}$$

Псевдотензор ЭИ гравитационного поля t_i^k призван описывать отрицательную энергию гравитационного поля в равенстве (1.2) так же, как тензор ЭИ электрического поля $\underset{f}{T}{}_i^k$ описывает (положительную) энергию электрического поля в равенстве (1.1). Сумма $T_i^k + t_i^k$ называется псевдотензором ЭИ материи вместе с гравитационным полем.

Равенство (1.2), в отличие от равенства (1.1), предполагает обязательное искривление пространства-времени, поскольку здесь под T_i^k понимается эйнштейновское выражение

$$T_i^k = (R_i^k - R_l^l \delta_i^k / 2)/8\pi, \tag{1.3}$$

а t_i^k [3 (87.12)] [4 (405] удовлетворяет равенству [3 § 87],

$$\partial_k (t_i^k \sqrt{-g}) = -\Gamma_{im}^n T_n^m \sqrt{-g}\ , \tag{1.4}$$

и поэтому равенство (1.2) математически следует из равенства (1.1). Явное выражение для $T_i^k + t_i^k$ через производные метрического тензора приведено в [3 (89.3)]. В плоском пространстве все обращается в ноль.

В настоящей статье показано, что равенство (1.2), в действительности, ни в коем случае не выражает закон сохранения полного ЭИ замкнутой системы "материя + гравитационное поле".

2. Закон сохранения в плоском пространстве

Равенство (1.1) для тензора ЭИ материи (вещество + поле), T_i^k, называется локальным или дифференциальным законом сохранения. Тут под *полем* понимается в основном электромагнитное поле. И ни в коем случае не гравитационное поле. Потому что в рамках общей теории относительности (ОТО) гравитационного поля нет. Эйнштейн его геометризовал. Остались электромагнитное, слабое, глюонное поле, может быть "пятое" или какое-то скалярное поле, но гравитационного поля нет в рамках ОТО.

Ковариантный локальный закон сохранения (1.1) обеспечивает справедливость (интегрального) закона сохранения ЭИ материи в плоском пространстве-времени в произвольных (криволинейных) координатах.

Действительно, начнем с использования галилеевых координат (метрической тензор представляет собой диагональ $1,-1,-1,-1$), которые допустимы в плоском пространстве. Подсчет 4-импульса материи, заключенной в 3-объеме V (или во всем пространстве, то есть на некоторой гиперплоскости) производится по простой формуле [2 (32,6)]

$$P_i = \int_V T_i^k \sqrt{-g}\, dV_k = \int_V T_i^k dV_k \tag{2.1}$$

(при этом точка приложения 4-вектора P_i с такими *координатами*[1] не имеет значения; этот вектор является свободным вектором; однако разумно выбрать точку приложения на самой

[1] Мы предпочитаем называть *числа* P_i "координатами" вектора, а не его "компонентами", потому что компонентами вектора являются его *составляющие* по координатным осям.

гиперповерхности). Переход во времени от одной гиперповерхности V_1 к другой V_2 мог бы вызвать изменение такого 4-импульса, но это изменение выражается через частную дивергенцию, которая в галилеевых координатах равна ковариантной дивергенции и потому равна нулю. Это обеспечивает сохранение 4-импульса:

$$\underset{2}{P}{}_i - \underset{1}{P}{}_i = \int_{V_2} T_i^k dV_k - \int_{V_1} T_i^k dV_k = \oint T_i^k dV_k = \int_\Omega \partial_k T_i^k d\Omega = \int_\Omega \nabla_k (T_i^k \sqrt{-g}) d\Omega = 0. \qquad (2.2)$$

При переходе к криволинейной системе координат 4-вектор (2.1) как геометрический объект не изменяется, а потому не нарушается его сохранение. Однако.
(i) Изменяется метод подсчета координат этого вектора, потому что формула (2.1) делается не верной, она заменяется формулой (2.5).
(ii) Координаты вектора становятся зависимыми от координат точки приложения, то есть от точки вычисления вектора.
(iii) Нулевое изменение вектора в галилеевых координатах (2.2), свидетельствующее о сохранении 4-импульса, превращается в условие параллельности векторов $\underset{2}{P}{}_i$ и $\underset{1}{P}{}_i$ при условии правильного их подсчета по формуле (2.5) [5]. Поэтому равенство (1.1) *выражает* закон сохранения ЭИ материи в плоском пространстве-времени не зависимо от используемой системы координат, вопреки известным утверждениям[2],.

Согласно этим утверждениям, при замене галилеевых координат криволинейными координатами 4-импульс (2.1) перестает сохраняться из-за того, что "наличие второго члена в (1.1), стоящего вне знака производной, не позволяет в общем случае заключить о постоянстве какого либо объемного интеграла" [6 § 89], причем величина несохранения зависит от используемых координат, от коэффициентов связности Γ^n_{im}:

$$\underset{2}{P}{}_i - \underset{1}{P}{}_i = \int_{V_2} T_i^k \sqrt{-g} dV_k - \int_{V_1} T_i^k \sqrt{-g} dV_k = \int_\Omega \partial_k (T_i^k \sqrt{-g}) d\Omega = \int_\Omega \Gamma^n_{im} T_n^m \sqrt{-g} d\Omega \neq 0. \qquad (2.3)$$

С этим утверждением нельзя согласиться.
(i) Использование криволинейных координат лишает смысла неравенство (2.3) и интегральную величину (2.1), потому что формулы (2.1) и (2.3) предполагают арифметическое сложение координат инфинитезимальных векторов $dP_i = T_i^k \sqrt{-g} dV_k$, принадлежащих различным точкам пространства, в которых координатные реперы могут быть не параллельны. Поэтому **не существует репера**, поддерживающего интегралы P_i (2.1) в качестве координат. И нет оснований относить числа P_i к галилеевому реперу на пространственной бесконечности, который упоминается в тех случаях, когда координатная система отличается от галилеевой лишь "внутри канала" в четырехмерном пространстве-времени.
(ii) Неравенство (2.3) означает лишь, что при переходе от одной гиперповерхности интегрирования к другой изменяются *безреперные* интегральные величины (2.1). Из этого нельзя сделать никакого вывода. Координаты постоянного вектора непременно изменяются в системе криволинейных координат при переходе от одной точки к другой.
(iii) Укороченное равенство

$$\partial_k (T_i^k \sqrt{-g}) = 0, \qquad (2.4)$$

которое выдается за условие сохранения [2 § 96] [3 (84.3)] [4 (341)], на самом деле просто обеспечивает постоянство *безреперных* бессмысленных интегралов (2.1) в любом пространстве при любой системе координат при переходе от одной гиперповерхности к другой. Наоборот, целое равенство (1.1), обеспечивает правильно подсчитанному интегральному 4-импульсу (2.5), такие (переменные) координаты, которые выражают его постоянство в плоском пространстве.

[2] "Уравнение (1), вообще говоря, не выражает закона сохранения чего бы то ни было" [2 § 96]. "Соотношение (1) не приводит, само по себе, к законам сохранения" [6 § 89]

Для того чтобы интегрирование в криволинейных координатах имело геометрический смысл, нужно использовать двухточечную тензорную функцию, называемую *транслятором,* $\Psi_{i'}^{i}(x',x)$ [7,8]. С помощью транслятора параллельного переноса осуществляется перенос элементарных векторов $dP_i = T_i^k \sqrt{-g}dV_k$ в некоторую общую точку x' до их интегрирования: $dP_{i'}(x') = \Psi_{i'}^{i}(x',x)dP_i(x)$. Потом в этой точке производится интегрирование

$$P_{i'}(x') = \int_V \Psi_{i'}^{i} T_i^k \sqrt{-g}dV_k \ . \qquad (2.5)$$

Этот процесс подробно рассмотрен в [9]. Там доказывается, что локальный закон сохранения (1.1) в плоском 4-пространстве обеспечивает параллельный перенос интегрального 4-импульса (2.5) при изменении точки x' приложения этого вектора, то есть точки вычисления интеграла (2.5). В этом смысле интегральный вектор $P_{i'}(x')$ (2.5) является свободным вектором.

Однако там же доказывается, что в *искривленном* 4-пространстве, вообще говоря, $P_{i'}(x')$ **не** перносится параллельно при переносе точки x' вдоль гиперповерхности интегрирования V. Это означает, что ЭИ материи не имеет однозначного определения в искривленном пространстве. Общая масса, вычисляемая из различных мест пространства, может оказаться различной.

В некоторых случаях, однако, масса материи имеет определенный смысл и в искривленном пространстве. Тогда возникает вопрос о сохранении массы при переходе от одной гиперповерхности к другой В следующем разделе приводится простой важный пример *несохранения* массы сферы из идеальной жидкости. Другой пример рождения материи в искривленном 4-пространстве был приведен ранее [10]

3. Масса сферы из идеальной жидкости

Рассмотрим метрический тензор (внутреннего и внешнего) пространства Шварцшильда, которое описывает сферу из идеальной жидкости [3 § 96]. Внутреннее пространство зависит от двух параметров, R и r_1, причем $0 \le r \le r_1 < R$:

$$ds^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{r_1^2}{R^2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}\right)^2 dt^2 - \frac{1}{1-\frac{r^2}{R^2}}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2, \qquad (3.1)$$

$$\sqrt{-g} = \sqrt{-g_{tt}g_{rr}}\, r^2 \sin\theta . \qquad (3.2)$$

Здесь R есть радиус кривизны пространства, определяемый постоянной плотностью жидкости $\rho = 3/(8\pi R^2)$, а r_1 есть координата поверхности сферы, где и происходит сшивка с внешним пространством Шварцшильда, которое зависит от одного параметра, шварцшильдовской константы $m = r_g/2$:

$$ds^2 = \left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2 - \frac{1}{1-\frac{2m}{r}}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2 . \qquad (3.3)$$

Видно, что при гладкой сшивке $m = r_1^3/2R^2$.

Подсчет массы в данном случае возможен, потому что, из-за статичности пространства, элементарные векторы $dP_i = T_i^k\sqrt{-g}dV_k$ все параллельны между собой и имеют только временную координату $dP_t = T_t^t\sqrt{-g}dV_t$. Так что можно просто интегрировать их *модули* $dP = dP_t/\sqrt{g_{tt}}$.

Координата T_t^t вычислена в [3 (96.7)] по формуле (1.3): $T_t^t = \rho = 3/(8\pi R^2)$. Обозначая массу через P, имеем [9]:

$$P=\int T_t^t\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{tt}}}dV_t=\int T_t^t\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{tt}}}drd\theta d\varphi=\int_0^{r_1}T_t^t\sqrt{-g_{rr}}\,r^2dr4\pi=\int_0^{r_1}\frac{3}{2R}\frac{r^2dr}{\sqrt{R^2-r^2}}. \qquad (3.4)$$

Интегрирование дает:

$$P=\frac{3R}{4}(\arcsin\xi-\xi\sqrt{1-\xi^2}),\quad \xi=\frac{r_1}{R}. \qquad (3.5)$$

Ограничиваясь двумя членами разложения по ξ в формуле (3.5), получим

$$P=m(1+\frac{3}{10}\frac{r_1^2}{R^2}+\ldots)=m(1+\frac{3}{10}\frac{m}{r_1}+\ldots) \qquad (3.6)$$

Превышение массы сферы P над шварцильдовским параметром m названо в [2 §100] (положительным) гравитационным дефектом массы. Масса растет при сжатии сферы по формуле (3.6) в квазистатическом случае. Аналогично, во Введении было упомянуто про рост массы пылевого облака при сжатии. Псевотензору гравитационного поля, t_t^t, предназначено внести *отрицательный* вклад в полную массу системы "вещество + гравитационное поле", чтобы общая масса-энергия **сохранялась** неизменной, равной шваршильдовскому параметру m, в соответствии с тем, что сумма $T_i^k+t_i^k$ названа псевдотензором ЭИ материи вместе с гравитационным полем.

4. А псевдотензор – положителен!

Явное выражение для $T_t^t+t_t^t$ [3 (89.3)] при аккуратном вычислении [3 §91,§92] приводит к фатальному результату [3 (97.3),(97.5)]

$$T_t^t+t_t^t=\rho+3p. \qquad (4.1)$$

Так что псевдотензор t_i^k [3 (87.12)] [4 (405)] в случае сферы из идеальной жидкости имеет **положительную** временную координату $t_t^t=3p$, равную утроенному давлению внутри жидкости. Его добавление к плотности вещества $T_t^t=\rho$ в формуле (3.4) только увеличивает "полную массу системы вещество + гравитационное поле".

$$J=\int(T_t^t+t_t^t)\frac{\sqrt{-g}}{\sqrt{g_{tt}}}dV_t=\int_0^{r_1}(T_t^t+t_t^t)\sqrt{-g_{rr}}\,r^2dr4\pi>m(1+\frac{3}{10}\frac{m}{r_1}+\ldots). \qquad (4.2)$$

Это означает крах всей концепции псевдотензора ЭИ гравитационного поля.

Осталось выяснить, почему физики пришли к выводу, что "Формула для полной энергии жидкой сферы сводится к сумме полной собственной энергии и потенциальной гравитационной энергии. Этот резуьтат, естественно, укрепляет нашу уверенность в практических преимуществах эйнштейновского метода, использующего псевдотензорную плотность потенциальной гравитационной энергии и импульса $t_i^k\sqrt{-g}$ " [3 §97]

Дело в том, что вместо "полной энергии жидкой сферы" J (4.2), по ошибке была вычислена *безреперная координата* [3 (97.3)] [4 (447)]

$$J_t=\int(T_t^t+t_t^t)\sqrt{-g}dV_t=\int(\rho+3p)\sqrt{-g}dV_t=m, \qquad (4.3)$$

которая оказалась равна желанной шварцшильдовской константе. Так получилось потому, что в интегранде выражения (4.3) отсутствует знаменатель в виде $\sqrt{g_{tt}}<1$, из-за которого $J>J_t=m$.

5. Заключение

Создание псевдотензора ЭИ гравитационного поля явилось попыткой поддержать описание гравитации с помощью понятия "гравитационного поля". Эту попытку следует признать неудачной: потенциальная энергия гравитационного поля отрицательна, а призванный её описывать псевдотензор – положителен.

Список литературы

1 Эйнштейн А "К современному состоянию проблемы тяготения" *Собрание научных трудов*. Том 1 (М.: Наука 1965) стр. 276
2 Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
3 Толмен Р. *Относительность, термодинамика и космология* (М.: Наука, 1974)
4 Паули В. *Теория относительности* (М.: ОГИЗ, 1947)
5 Храпко Р И "Протяженное тело в искривленном пространстве". *Тезисы докладов всесоюзной гравитационной конференции* (ГР-IV, Минск, 1-3 июля, 1976 г.) с. 66. http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=145&module=files
6 Фок В.А. *Теория пространства, времени и тяготения* (М.: ГИТТЛ, 1955)
7 Храпко Р.И. "Функции пути". *ТМФ* **65**, 334 (1995) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=95&module=files
8 Храпко Р И "Теорема Остроградского-Гаусса в искривленном пространстве". *Тезисы докладов всесоюзной гравитационной конференции* (ГР-IV, Минск, 1-3 июля, 1976 г.) с. 64. http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=146&module=files
9 Khrapko R.I. "The Truth about the Energy-Momentum Tensor and Pseudotensor" *Gravitation and Cosmology*, 20, 4 (2014), p. 264. http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=132&module=files. Русский оригинал http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=112&module=files
10 Храпко Р. И "Пример рождения вещества в гравитационном поле". *ЖЭТФ* **62,** 833 (1972) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=93&module=files

The Truth about the Energy-Momentum Pseudotensor of Gravitation Field

R.I. Khrapko
Moscow Aviation Institute, Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russian Federation

It is shown that the energy-momentum pseudotensor of gravitation field, which is called on to describe the negative potential gravitational energy, is positive. So, it is useless

Keywords: gravitation, energy, field concept, covariance

PACS number: **04.20.Cv**