Отражение света от движущегося зеркала

Р. И. Храпко[*]
Московский авиационный институт, Москва, 125993

Продемонстрировано выполнение законов сохранения в отношении потоков импульса, энергии, спина и фотонов при отражении плоской электромагнитной волны круговой поляризации от удаляющегося зеркала при нормальном падении

Ключевые слова: спин, круговая поляризация, тензор спина
PACS 75.10.Hk

1. Введение

Отражение света от движущегося зеркала почти исчерпывающим образом исследовано в известной статье [1]. Тем не менее, представляется интересным продемонстрировать выполнение законов сохранения импульса, энергии, числа фотонов и спина при таком отражении. Для подсчета импульса и энергии используется тензор Максвелла в пространстве Минковского [2]

$$T^{\alpha\beta} = g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} F^{\lambda\beta} + g^{\alpha\beta} F_{\mu\lambda} F^{\mu\lambda} / 4, \tag{1.1}$$

для подсчета спина используется канонический тензор спина [3-7]

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu}, \tag{1.2}$$

здесь $F_{\mu\lambda}$ есть тензор электромагнитного поля, а A^λ есть векторный магнитный потенциал.

Число фотонов подсчитывается исходя из энергии фотона $\hbar\omega$ или его спина $\hbar$. Мы ограничиваемся нормальным падением света на зеркало и для определенности рассматриваем *удаляющееся* зеркало. Имея в виду подсчитывать спин, мы рассматриваем падающую плоскую волну круговой поляризации

$$\mathbf{E}_1 = E_1(\mathbf{x} + i\mathbf{y})\exp(ik_1 z - i\omega_1 t) \text{ [V/m]}, \quad \mathbf{H}_1 = -i\varepsilon_0 c\mathbf{E}_1 \text{ [A/m]}, \quad ck_1 = \omega_1 \tag{1.3}$$

и, соответственно, отраженную волну

$$\mathbf{E}_2 = E_2(\mathbf{x} + i\mathbf{y})\exp(-ik_2 z - i\omega_2 t), \quad \mathbf{H}_2 = i\varepsilon_0 c\mathbf{E}_2. \quad ck_2 = \omega_2 \tag{1.4}$$

Как хорошо известно [1], отношение частот отраженной и падающей волны совпадает с отношением амплитуд этих волн и дается формулой

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{1-\beta}{1+\beta}, \tag{1.5}$$

где $\beta = v/c$, а v есть скорость удаления зеркала.

2. Плотность потока импульса, то есть давление $\mathscr{P}$

Волна, падающая на зеркало, в силу эффекта Доплера [8 § 48], имеет по отношению к зеркалу частоту

$$\omega_0 = \omega_1 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tag{2.1}$$

и, соответственно, имеет амплитуду

$$E_0 = E_1 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{2.2}$$

[*] Email: khrapko_ri@hotmail.com, http://khrapkori.wmsite.ru

Мы считаем зеркало сверхпроводящим, поэтому магнитное поле удваивается на зеркале при нулевом электрическом поле

$$\mathbf{H}_0 = 2\varepsilon_0 c E_0 (\mathbf{x} + i\mathbf{y}) \exp(-i\omega_0 t). \tag{2.3}$$

Поэтому давление на зеркало по формуле $\mathscr{P}_0 = < T^{zz} > = \mu_0 < H^2 > /2$ оказывается равным

$$\mathscr{P}_0 = < T_0^{zz} > = \mu_0 \Re\{H_x \overline{H}_x + H_y \overline{H}_y\}/4 = 2\varepsilon_0 E_0^2 = 2\varepsilon_0 E_1^2 \frac{1-\beta}{1+\beta} \text{ [N/m}^2\text{]}. \tag{2.4}$$

Кроме потока импульса, дающего на зеркало давление $\mathscr{P}_0$, происходит наполнение импульсом пространства, освобождаемого двигающимся зеркалом. Объемная плотность этого наполнения $G^z = < T_1^{zt} + T_2^{zt} >$ состоит из двух частей, принадлежащих падающей волне и отраженной волне:

$$T_1^{zt} + T_2^{zt} = g^{zz}(F_{1zx}F_1^{xt} + F_{1zy}F_1^{yt} + F_{2zx}F_2^{xt} + F_{2zy}F_2^{yt}) \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} G^z = < T_1^{zt} + T_2^{zt} > &= -\Re(-B_{1zx}\overline{D}_1^{xt} - B_{1zy}\overline{D}_1^{yt} - B_{2zx}\overline{D}_2^{xt} - B_{2zy}\overline{D}_2^{yt})/2 \\ &= \frac{\varepsilon_0}{c}(E_1^2 - E_2^2) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{c}\left(1 - \frac{E_2^2}{E_1^2}\right) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2 4\beta}{c(1+\beta)^2} \text{ [Ns/m}^3\text{]}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Это наполнение требует плотность потока импульса $G^z v$, которую мы назовем $\tilde{\mathscr{P}}$:

$$\tilde{\mathscr{P}} = G^z v = \frac{\varepsilon_0 E_1^2 4\beta^2}{(1+\beta)^2} \text{ [N/m}^2\text{]}. \tag{2.7}$$

Суммарная плотность потока равна

$$\mathscr{P} = \mathscr{P}_0 + \tilde{\mathscr{P}} = 2\varepsilon_0 E_1^2 \left[\frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{\varepsilon_0 E_1^2 2\beta^2}{(1+\beta)^2}\right] = 2\varepsilon_0 E_1^2 \frac{1+\beta^2}{(1+\beta)^2} \tag{2.8}$$

Эта суммарная плотность обеспечивается входящей плотностью потока $\mathscr{P} = < T_1^{zz} + T_2^{zz} >$. Действительно, учитывая формулу (1.1), имеем для падающей или отраженной волны выражения типа

$$\begin{aligned} T^{zz} &= g^{zz}(F_{zt}F^{tz} + F_{zx}F^{xz} + F_{zy}F^{yz} + F_{xt}F^{xt} + F_{yx}F^{yx} + F_{yt}F^{yt})/2 \\ &= -(B_{zx}H^{xz} + B_{zy}H^{yz} - E_x D^x - E_y D^y)/2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$< T^{zz} > = \mu_0 (H_y^2 + H_x^2)/4 + \varepsilon_0 (E_y^2 + E_x^2)/4 = \varepsilon_0 E^2. \tag{2.9}$$

Так что суммарная плотность потока импульса

$$\mathscr{P} = < T_1^{zz} + T_2^{zz} > = \varepsilon_0 (E_1^2 + E_2^2) = \varepsilon_0 E_1^2 \left(1 + \frac{E_2^2}{E_1^2}\right) = \varepsilon_0 E_1^2 \left[1 + \frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2}\right] = 2\varepsilon_0 E_1^2 \frac{1+\beta^2}{(1+\beta)^2} \tag{2.10}$$

совпадает с выражением (2.8)

3. Закон сохранения энергии

Давление на зеркало $\mathscr{P}_0$ (2.4) производит работу из-за движения зеркала. Соответствующая плотность потока массы-энергии равна

$$\Pi_0 = \frac{\mathscr{P}_0 v}{c^2} = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2}{c} \frac{1-\beta}{1+\beta} \beta \left[\frac{kg}{m^2 s}\right] \tag{3.1}$$

Кроме того, происходит наполнение массой-энергией пространства, освобождаемого двигающимся зеркалом. Объемная плотность этого наполнения $u = < T_1^{tt} + T_2^{tt} >$ состоит из двух частей, принадлежащих падающей волне и отраженной волне. Учитывая формулу (1.1), имеем для падающей или отраженной волны выражения типа

$$\begin{aligned} T^{tt} &= g^{tt}(F_{tx}F^{xt} + F_{ty}F^{yt} + F_{tz}F^{zt} + F_{xy}F^{xy} + F_{xz}F^{xz} + F_{yz}F^{yz})/2 \\ &= (E_x D^x + E_y D^y + B_{xz}H^{xz} + B_{yz}H^{yz})/(2c^2), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$< T^{tt} > = \varepsilon_0 (E_x^2 + E_y^2)/(4c^2) + \mu_0 (H_y^2 + H_x^2)/(4c^2) = \varepsilon_0 E^2 / c^2 \text{ [kg/m}^3\text{]}. \tag{3.3}$$

Так что суммарная объемная плотность массы энергии равна

$$u =< T_1^{tt} + T_2^{tt} >= \varepsilon_0 (E_1^2 + E_2^2)/c^2 = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{c^2}(1+\frac{E_2^2}{E_1^2}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{c^2}\left[1+\frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2}\right] = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2}{c^2}\frac{1+\beta^2}{(1+\beta)^2}. \quad (3.4)$$

Это наполнение требует плотность потока массы-энергии, которую мы назовем $\tilde{\Pi} = uv$,

$$\tilde{\Pi} = uv = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2}{c}\frac{1+\beta^2}{(1+\beta)^2}\beta. \quad (3.5)$$

Суммарная плотность потока массы-энергии

$$\Pi_0 + \tilde{\Pi} = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2}{c}\left[\frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1+\beta^2}{(1+\beta)^2}\right]\beta = \frac{4\varepsilon_0 E_1^2 \beta}{c(1+\beta)^2} \ \left[\frac{kg}{m^2 s}\right] \quad (3.6)$$

обеспечивается суммарным вектором Пойнтинга $\Pi =< T_1^{tz} + T_2^{tz} >$. Действительно

$$T_1^{tz} + T_2^{tz} = g^{zz}(F_{1zx}F_1^{xt} + F_{1zy}F_1^{yt} + F_{2zx}F_2^{xt} + F_{2zx}F_2^{xt}) = -(-B_{1zx}D_1^x - B_{1zy}D_1^y - B_{2zx}D_1^x - B_{2zy}D_1^y),$$

$$= \mu_0\varepsilon_0 (H_{1y}E_{1x} - H_{1x}E_{1y} + H_{2y}E_{2x} - H_{2x}E_{2y}), \quad (3.7)$$

$$\Pi =< T_1^{tz} + T_2^{tz} >= \frac{\varepsilon_0}{c}(E_1^2 - E_2^2) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{c}(1-\frac{E_2^2}{E_1^2}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{c}\left[1-\frac{(1-\beta)^2}{(1+\beta)^2}\right] = \frac{4\varepsilon_0 E_1^2 \beta}{c(1+\beta)^2}. \quad (3.8)$$

Величина (3.8) совпадает с (3.6).

4. Сохранение числа фотонов

Объемная плотность фотонов n в пространстве, освобождаемом движущемся зеркалом, получается делением частей плотности энергии (3.4) на энергию одного фотона, то есть на $\hbar\omega_1$ и на $\hbar\omega_2$

$$n = \varepsilon_0 (\frac{E_1^2}{\hbar\omega_1} + \frac{E_2^2}{\hbar\omega_2}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{\hbar\omega_1}(1+\frac{\omega_2}{\omega_1}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{\hbar\omega_1}\left[1+\frac{1-\beta}{1+\beta}\right] = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2}{\hbar\omega_1(1+\beta)} \ [1/\mathrm{m}^3]. \quad (4.1)$$

Из-за движения зеркала количество фотонов увеличивается. Это требует плотность потока числа фотонов

$$nv = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2 v}{\hbar\omega_1(1+\beta)} \ [1/\mathrm{m}^2\mathrm{s}]. \quad (4.2)$$

Эта плотность потока обеспечивается разностью векторов Пойнтинга из формулы (3.8)

$$< \frac{T_1^{tz}}{\hbar\omega_1} + \frac{T_1^{tz}}{\hbar\omega_2} > c^2 = \varepsilon_0 c (\frac{E_1^2}{\hbar\omega_1} - \frac{E_2^2}{\hbar\omega_2}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2 c}{\hbar\omega_1}(1-\frac{\omega_2}{\omega_1}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2 c}{\hbar\omega_1}\left[1-\frac{1-\beta}{1+\beta}\right] = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2 v}{\hbar\omega_1(1+\beta)}. \quad (4.3)$$

Плотность потока числа фотонов (4.3) совпадает с плотностью потока (4.2).

5. Сохранение спина

Число фотонов можно подсчитать исходя не из энергии волн, а из их спина. Объемная плотность спина дается компонентой канонического тензора спина (1.2)

$$\Upsilon^{xyt} = -2A^{[x}F^{y]t} = -A_x D_y + A_y D_x \ [\mathrm{Js/m^3}], \quad (5.1)$$

а плотность потока спина дается компонентой

$$\Upsilon^{xyz} = -2A^{[x}F^{y]z} = A_x H_x + A_y H_y \ [\mathrm{J/m^2}]. \quad (5.2)$$

Отметим, что опускание пространственного индекса у векторного потенциала связано с изменением знака, ввиду сигнатуры метрики.

Так как для монохроматического поля $A_k = -\int E_k dt = -iE_k/\omega$, плотности (5.1), (5.2) можно выразить через электромагнитное поле:

$$\Upsilon^{xyt} = (iE_x D_y - iE_y D_x)/\omega, \quad \Upsilon^{xyz} = (-iE_x H_x - iE_y H_y)/\omega. \quad (5.3)$$

В нашем случае отражения от движущегося зеркала (1.3), (1.4) объемная плотность спина равна

$$< \Upsilon^{xyt} >= \Re\{(iE_{1x}\overline{D}_{1y} - iE_{1y}\overline{D}_{1x})/\omega_1 + (iE_{2x}\overline{D}_{2y} - iE_{2y}\overline{D}_{2x})/\omega_2\}/2$$
$$= \varepsilon_0(\frac{E_1^2}{\omega_1} + \frac{E_2^2}{\omega_2}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{\omega_1}(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2}{\omega_1}\left[1 + \frac{1-\beta}{1+\beta}\right] = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2}{\omega_1(1+\beta)}, \tag{5.4}$$
а плотность фотонов получается делением на $\hbar$ и совпадает с числом (4.1).
Плотность потока спина равна
$$< \Upsilon^{xyz} >= \Re\{(-iE_{1x}\overline{H}_{1x} - iE_{1y}\overline{H}_{1y})/\omega_1 + (-iE_{2x}\overline{H}_{2x} - iE_{2y}\overline{H}_{2y})/\omega_2\}/2$$
$$= \varepsilon_0 c(\frac{E_1^2}{\omega_1} - \frac{E_2^2}{\omega_2}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2 c}{\omega_1}(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1}) = \frac{\varepsilon_0 E_1^2 c}{\omega_1}\left[1 - \frac{1-\beta}{1+\beta}\right] = \frac{2\varepsilon_0 E_1^2 v}{\omega_1(1+\beta)}, \tag{5.5}$$
а плотность потока фотонов получается делением на $\hbar$ и совпадает с числом (4.3).
Естественно, увеличение количества спина обеспечивается потоком спина
$$< \Upsilon^{xyt} > v =< \Upsilon^{xyz} > \tag{5.6}$$

6. Заключение

Приведенные расчеты показывают, что спин является таким же естественным свойством плоской электромагнитной волны, как энергия и импульс. Признавая наличие в электромагнитной волне (1.3) фотонов с импульсом, энергией и спином, странно отрицать наличие в такой волне спина, как это делается в современной электродинамике.

Я бесконечно благодарен профессору Роберту Ромеру, отважно опубликовавшему мой вопрос: "Действительно ли плоская волна не несет спин?" [9]

Список литературы

1.Болотовский Б М, Столяров С Н "Отражение света от движущегося зеркала" УФН **159,** 155 (1989)
2. Jackson J. D., Classical Electrodynamics, (John Wiley, 1999), p. 609.
3. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. *Введение в теорию квантованных полей* М.: ГИТТЛ, 1957, с.24
4. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. *Квантовые поля* М.: Наука, 1993, с. 40
5. Corson E M *Introduction to tensors, spinors, and reativistic wave-equation* NY, Hafner, 1953 p.71
6. Soper D. E., *Classical Field Theory* (N.Y.: Dover, 2008), p. 114
7. Соколов А А *Введение в квантовую электродинамику* М, ГИФМЛ 1958, с. 50
8. Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц, Теория поля (М.: Наука, 1973)
9. Khrapko R I "Does plane wave not carry a spin?" *Amer. J. Phys*. 69, 405 (2001) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=10&module=files

Reflection of light from a moving mirror

Radi I. Khrapko
Moscow Aviation Institute - Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia

It is shown that the conservation laws of momentum, energy, spin, and number of photons are satisfied when a plane electromagnetic wave is reflected from a moving off mirror.

Дополнение

Эта статья опубликована:
Reflection of light from a moving mirror *Optik* **136** (2017) 503–506
http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=153&module=files
Однако в числе других, она была отклонена редакцией УФН.
Апелляция оставлена без внимания.

Российская академия наук

Редакция журнала «*Успехи физических наук*»

119991 Москва, Ленинский проспект д. 53

Тел. (499) 132-62-65. Тел./Факс. (499) 190-42-44, (499) 132-63-48.

E-mail: ufn@ufn.ru

7 февраля 2017 г. **Р.И. Храпко**

Уважаемый Радий Игоревич!

Редколлегия УФН ознакомилась с Вашими статьями:

1. Отражение света от движущегося зеркала
2. Использование канонического тензора спина
3. Поглощение момента импульса плоской электромагнитной волны
4. Спин, передаваемый зеркалу при отражении света

Данные статьи посвящены явной проверке законов сохранения в классической электродинамике. Для читателей УФН они интереса не представляют.

Поэтому редколлегии УФН не может принять Ваши статьи «Отражение света от движущегося зеркала», «Использование канонического тензора спина», «Поглощение момента импульса плоской электромагнитной волны», «Спин, передаваемый зеркалу при отражении света» к рассмотрению.

Главный редактор
журнала «Успехи физических наук»
академик РАН В.А. Рубаков