Поглощение момента импульса плоской электромагнитной волны

Р. И. Храпко*
Московский авиационный институт, Москва, 125993

Продемонстрировано, что при поглощении плоской электромагнитной волны круговой поляризации в диэлектрике или магнетике поглощается момент импульса, который приносится поглощаемой волной. Для плотности потоков энергии, импульса и момента импульса использованы преобразования Лоренца, необходимые при рассмотрении движущегося поглотителя.

Ключевые слова: спин, круговая поляризация, тензор спина
PACS 75.10.Hk

1. Введение. Симметричный поглотитель.

Отражение света от движущейся границы раздела двух сред почти исчерпывающим образом исследовано в известной статье [1]. Тем не менее, представляется интересным продемонстрировать выполнение законов сохранения энергии и момента импульса в конкретных ситуациях. В статье [2] рассмотрено отражение света от движущегося зеркала. Однако в этом случае отсутствует поглощение энергии света и момента импульса (зеркало поглощает только импульс). В статье [3] рассмотрено поглощение и отражение света при взаимодействии света с покоящимся диэлектриком. В настоящей статье мы рассмотрим взаимодействие света с движущимся диэлектриком или магнетиком. При этом для того, чтобы не отвлекаться на громоздкие вычисления, не затрагивающие принципиальную сторону процесса, мы рассмотрим взаимодействие электромагнитной волны с так называемым "симметричным поглотителем", который является одновременно диэлектриком и магнетиком, причем $\varepsilon=\mu$. Такая среда представляет для электромагнитной волны "согласованную нагрузку", которая не требует отраженной волны.

Итак, пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна круговой поляризации

$$\breve{\mathbf{E}}=E(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\exp(ikz-i\omega t)\ \text{[V/m]},\quad \breve{\mathbf{H}}=-i\varepsilon_0 c\breve{\mathbf{E}}\ \text{[A/m]},\quad ck=\omega \tag{1.1}$$

падает нормально на плоскую x, y - поверхность поглотителя, который характеризуется комплексными постоянными $\breve{\varepsilon}=\breve{\mu}$ (мы отмечаем комплексные числа и вектора знаком *breve*). Как известно, волна (1.1) содержит объемную плотность массы-энергии u, плотность потока массы-энергии (вектор Пойнтинга) Π, объемную плотность импульса G и плотность потока импульса (давление) $\mathcal{P}$, согласно формулам

$$u=\frac{\varepsilon_0E^2}{c^2}\ \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right],\ \ \Pi=G=\frac{\varepsilon_0E^2}{c}\ \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2s}\right],\ \ \mathcal{P}=\varepsilon_0E^2\ \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}s^2}\right] \tag{1.2}$$

Мы считаем, что поверхность поглотителя движется вдоль оси z со скоростью v. В силу эффекта Доплера [4 § 48], наша волна имеет по отношению к этой поверхности несколько меньшую частоту и, согласно [1], имеет меньшую амплитуду

$$\omega'=\omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}},\qquad E'=E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,. \tag{1.3}$$

($\beta=v/c$). Так что, относительно поглотителя падающая на него волна выражается формулами

$$\breve{\mathbf{E}}'=E'(\mathbf{x}+i\mathbf{y})\exp(ik'z-i\omega't)\,,\quad \breve{\mathbf{H}}'=-i\varepsilon_0c\breve{\mathbf{E}}',\quad ck'=\omega' \tag{1.4}$$

Соответственно, оказываются меньшими вектор Пойнтинга и плотность потока импульса на поверхность с точки зрения поверхности:

* Email: khrapko_ri@hotmail.com, http://khrapkori.wmsite.ru

$$\Pi' = \frac{\varepsilon_0 E'^2}{c} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}\frac{1-\beta}{1+\beta}, \quad \mathscr{P}' = \varepsilon_0 E'^2 = \varepsilon_0 E^2 \frac{1-\beta}{1+\beta} \tag{1.5}$$

2. Преобразования Лоренца

Однако, с точки зрения неподвижного наблюдателя, эти последние величины, то есть плотности потоков энергии и импульса, проходящие через поверхность, имеют другие значения, которые следует найти, учитывая преобразования Лоренца для координат 4-точки и компонент 4-импульса

$$t = \frac{t' + vz'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad m = \frac{m' + vp'/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad p = \frac{p' + vm'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.1}$$

Значения этих плотностей потоков мы обозначим $\Pi_0, \mathscr{P}_0$. Имея в виду, что для плотностей справедливы равенства

$$\Pi_0 = m/at, \ \mathscr{P}_0 = p/at, \ \Pi' = m'/at', \ \mathscr{P}' = p'/at', \tag{2.2}$$

где a есть не преобразуемая площадь, и, подставляя величины (2.1) при $z' = 0$ в выражения (2.2), получим преобразования Лоренца для плотностей

$$\Pi_0 = \Pi' + v\mathscr{P}'/c^2, \ \mathscr{P}_0 = \mathscr{P}' + \Pi' v. \tag{2.3}$$

Таким образом, вблизи поверхности поглотителя, с точки зрения неподвижного наблюдателя, плотность потока массы-энергии, входящая в поглотитель, равна

$$\Pi_0 = \Pi' + \frac{v\mathscr{P}'}{c^2} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}\frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{v}{c^2}\varepsilon_0 E^2 \frac{1-\beta}{1+\beta} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}(1-\beta) \tag{2.4}$$

3. Заполнение пространства массой

Полученная величина (2.4) меньше, чем плотность потока массы Π (1.2), приносимая падающей волной. Разница расходуется на заполнение массой пространства, освобождаемого удаляющейся поверхностью поглотителя. Это заполнение требует плотности потока массы, которую мы обозначим $\tilde{\Pi}$,

$$\tilde{\Pi} = uv = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c^2} v = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}\beta. \tag{3.1}$$

В результате имеем естественное равенство

$$\Pi = \tilde{\Pi} + \Pi_0 = \frac{\varepsilon_0 E^2}{c}. \tag{3.2}$$

Представляет, однако, интерес продемонстрировать механизм поглощения плотности потока массы Π' (1.5) в симметричном поглотителе.

4. Поглощение энергии и момента импульса

Волна, распространяющаяся в поглотителе, в соответствие с (1.4), выражается формулами

$$\breve{\mathbf{E}}' = E'(\mathbf{x} + i\mathbf{y})\exp(ik'\breve{k}z - i\omega' t'), \quad \breve{\mathbf{H}}' = -i\varepsilon_0 c\breve{\mathbf{E}}', \quad ck' = \omega' \quad \breve{k} = \sqrt{\breve{\varepsilon}\breve{\mu}} = \breve{\varepsilon} = \breve{\mu} = k_1 + ik_2 \tag{4.1}$$

Механизм поглощения энергии в диэлектрике хорошо объяснил Фейнман [5]. Согласно этому объяснению, вращающееся электрическое поле $\breve{\mathbf{E}}' = \breve{E}'(\mathbf{x} + i\mathbf{y})\exp(-i\omega' t')$ оказывает момент силы $\tau = \breve{\mathbf{p}}_e \times \breve{\mathbf{E}}'$ на вращающиеся дипольные моменты $\mathbf{p}_e$ молекул поляризованного поглотителя. Объемная плотность мощности, совершаемой при этом работы, имеет выражение

$$w_e = \left|\breve{\mathbf{P}}_e \times \breve{\mathbf{E}}'\right| \omega'/c^2 \ \ [\mathrm{kg/m^3 s}], \quad \breve{\mathbf{P}}_e = (\breve{\varepsilon} - 1)\varepsilon_0 \breve{\mathbf{E}}', \tag{4.2}$$

$\breve{\mathbf{P}}_e$ есть вектор поляризации диэлектрика. Вычисление даёт:

$$w_e = \frac{\omega'}{2c^2}\Re\{\breve{P}_{ex}\overline{E}'_y - \breve{P}_{ey}\overline{E}'_x\} = \frac{\omega'\varepsilon_0}{2c^2}\Re\{(\breve{\varepsilon}-1)(\breve{E}'_x\overline{E}'_y - \breve{E}'_y\overline{E}'_x)\} = \frac{\omega'\varepsilon_0}{2c^2}\exp(-2k'k_2 z)\Re\{(\breve{\varepsilon}-1)(-i-i)\}E'^2$$
$$= \omega'\varepsilon_0 \exp(-2k'k_2 z)\Im(\breve{\varepsilon}-1)E'^2/c^2 = \omega'\varepsilon_0 \exp(-2k'k_2 z)k_2 E'^2/c^2. \tag{4.3}$$

Плотность потока энергии, приходящей на поверхность диэлектрика со стороны волн, находится интегрированием этой объемной плотности мощности по z:

$$\Pi'_e = \int_0^\infty w_e dz = \omega'\varepsilon_0 \int_0^\infty \exp(-2k'k_2 z) k_2 E'^2 dz / c^2 = \frac{\omega'\varepsilon_0}{2c^2 k'} E'^2 = \frac{\varepsilon_0 E'^2}{2c}. \quad (4.4)$$

Это выражение составляет половину от вектора Пойнтинга (1.5).

Естественно, что вращающееся магнитное поле электромагнитной волны (4.1) совершает свою половину работы, вращая магнитные дипольные моменты нашего поглотителя

$$w_m = \left|\breve{\mathbf{P}}_m \times \breve{\mathbf{H}}'\right| \mu_0 \, \omega' / c^2 \quad [\text{kg/m}^3\text{s}], \quad \breve{\mathbf{P}}_m = (\breve{\mu} - 1)\mathbf{H}', \quad (4.5)$$

$$w_m = \omega' \Re\{\breve{P}_{mx} \overline{H}'_y - \breve{P}_{my} \overline{H}'_x\} \mu_0 / 2c^2 = \omega' \mu_0 \Re\{(\breve{\mu} - 1)(\breve{H}'_x \overline{H}'_y - \breve{H}'_y \overline{H}'_x)\} / 2c^2. \quad (4.6)$$

Подставляя сюда выражения магнитного поля из (4.1), мы получим для работы магнитного поля те же значения, что и для работы электрического поля.

$$w_m = \omega' \varepsilon_0 \Re\{(\breve{\varepsilon} - 1)(\breve{E}'_x \overline{E}'_y - \breve{E}'_y \overline{E}'_x)\} / 2c^2, \quad \Pi'_m = \int_0^\infty w_m dz = \frac{\varepsilon_0 E'^2}{2c}, \quad (4.7)$$

Так что полная плотность потока энергии совпадает с (1.5)

$$\Pi' = \Pi'_e + \Pi'_m = \frac{\varepsilon_0 E'^2}{c}. \quad (4.8)$$

Следует осознавать, что объемная плотность момента силы[1] $\tau_{\sim} = \breve{\mathbf{P}}_e \times \breve{\mathbf{E}}' + \breve{\mathbf{P}}_m \times \breve{\mathbf{H}}' \mu_0$, поставляющая энергию внутрь диэлектрика вследствие вращения диполей, одновременно является объемной плотностью потока *момента импульса* внутрь диэлектрика. Эта объемная плотность момента силы $\breve{\mathbf{P}}_e \times \breve{\mathbf{E}}' + \breve{\mathbf{P}}_m \times \breve{\mathbf{H}}' \mu_0$ вызывает в диэлектрике специфические механические напряжения [6]. А в качестве объемной плотности потока момента импульса, она, будучи проинтегрирована по z, дает плотность потока момента импульса, поступающего на поверхность диэлектрика со стороны электромагнитных волн:

$$\Upsilon' = \int_0^\infty \left|\breve{\mathbf{P}}_e \times \breve{\mathbf{E}}' + \breve{\mathbf{P}}_m \times \breve{\mathbf{H}}' \mu_0\right| dz = \frac{c^2}{\omega'} \int_0^\infty (w_e + w_m) dz = \frac{\Pi' c^2}{\omega'} = \frac{\varepsilon_0 c}{\omega'} E'^2 \quad \left[\frac{\text{J s}}{\text{m}^2\text{s}}\right]. \quad (4.9)$$

Используя формулы (1.3), эту плотность потока можно выразить через величины, относящиеся к исходной волне (1.1)

$$\Upsilon' = \frac{\varepsilon_0 c}{\omega'} E'^2 = \frac{\varepsilon_0 c}{\omega} E^2 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}, \quad (4.10)$$

а для того, чтобы преобразовать её к исходной неподвижной лаборатории надо учесть, что для плотности потока момента импульса справедливы равенства

$$\Upsilon_0 = J / at, \quad \Upsilon' = J' / at', , \quad (4.11)$$

где a есть не преобразуемая площадь, а $J = J'$ есть не преобразующийся момент импульса относительно оси z. Учитывая (2.1), получим, что плотность потока момента импульса, входящая в поглотитель, с точки зрения неподвижного наблюдателя равна

$$\Upsilon_0 = \Upsilon' t' / t = \frac{\varepsilon_0 c}{\omega} E^2 \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\varepsilon_0 c}{\omega} E^2 (1-\beta). \quad (4.12)$$

Результаты этого раздела, касающиеся поглощения в диэлектрике энергии и момента импульса, были впервые опубликованы в статье [7].

5. Подсчет плотности потока момента импульса в электромагнитной волне

Судя по тому, что в толще поглотителя под каждым квадратным метром поверхности поглотителя поглощается в секунду момент импульса (4.12), можно заключить, что он приносится к поверхности волной (1.1). В качестве инструмента для подсчета плотности этого

---

[1] Нижним индексом тильда мы отмечаем псевдоплотности веса +1, каковой является объемная плотность момента силы $\tau_{\sim}$.в отличие от момента силы τ.

приносимого потока момента импульса естественно использовать канонический тензор спина электродинамики [8-12]

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}F^{\mu]\nu}, \tag{5.1}$$

здесь $F^{\mu\nu}$ есть тензор электромагнитного поля, а A^{λ} есть векторный магнитный потенциал. Плотность потока момента импульса, направленная на поверхность xy вдоль оси z, дается компонентой

$$\Upsilon^{xyz} = -2A^{[x}F^{y]z} = A_x H_x + A_y H_y \text{ [J/m}^2\text{]}. \tag{5.2}$$

Отметим, что опускание пространственного индекса у векторного потенциала связано с изменением знака, ввиду сигнатуры метрики.

Так как для монохроматического поля $A_k = -\int E_k dt = -iE_k/\omega$, плотность (5.2) можно выразить через электромагнитное поле:

$$\Upsilon^{xyz} = (-iE_x H_x - iE_y H_y)/\omega. \tag{5.3}$$

В нашем случае для волны (1.1) будем иметь

$$\Upsilon = <\Upsilon^{xyz}> = \Re\{-iE_x\overline{H}_x - iE_y\overline{H}_y\}/2\omega = \frac{\varepsilon_0 c}{\omega}E^2. \tag{5.4}$$

Эта величина, (5.4), больше, чем плотность потока момента импульса, входящая в поглотитель, (4.12). Разница расходуется на заполнение моментом импульса пространства, освобождаемого удаляющейся поверхностью поглотителя. Такое заполнение требует плотности потока момента импульса, которую мы обозначим $\tilde{\Upsilon}$. Объемная плотность момента импульса дается компонентой

$$\Upsilon^{xyt} = -2A^{[x}F^{y]t} = -A_x D_y + A_y D_x = (iE_x D_y - iE_y D_x)/\omega \tag{5.5}$$

канонического тензора спина (5.1). Усредняя по времени, получаем

$$<\Upsilon^{xyt}> = \Re\{(iE_x\overline{D}_y - iE_y\overline{D}_x)/2\omega = \varepsilon_0 E^2/\omega \text{ [Js/m}^3\text{]}. \tag{5.6}$$

Так что заполнение пространства требует

$$\tilde{\Upsilon} = <\Upsilon^{xyt}> v = \frac{\varepsilon_0 E^2}{\omega}v = \frac{\varepsilon_0 c E^2}{\omega}\beta. \tag{5.7}$$

В результате имеем естественное равенство

$$\Upsilon = \tilde{\Upsilon} + \Upsilon_0 = \frac{\varepsilon_0 c E^2}{\omega}. \tag{5.8}$$

6. Заключение

Приведенные расчеты показывают, что спин является таким же неотъемлемым свойством плоской электромагнитной волны круговой поляризации, как энергия. Признавая наличие в такой волне фотонов с энергией и спином, странно отрицать наличие в ней спина, как это делается в современной электродинамике.

Я бесконечно благодарен профессору Роберту Ромеру, отважно опубликовавшему мой вопрос: "Действительно ли плоская волна не несет спин?" [13]

Список литературы

1.Болотовский Б М, Столяров С Н "Отражение света от движущегося зеркала" *УФН* **159,** 155 (1989)
2. Храпко Р.И. "Отражение света от движущегося зеркала" http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=152&module=files Рассматривается УФН
3. Храпко Р.И. "Использование канонического тензора спина" http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=154&module=files Рассматривается УФН
4. Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
5. Фейнман Р. et al. *Фейнмановские лекции по физике* 8, 9, (М.: Мир, 1978)

6. Khrapko R.I. "Mechanical stresses produced by a light beam" *J. Modern Optics*, 55, 1487-1500 (2008) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=9&module=files
7. Храпко Р.И. "Поглощение света в диэлектрике" http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34422 (2003). Английский перевод: http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=116&module=files
8. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. *Введение в теорию квантованных полей* М.: ГИТТЛ, 1957, с.24
9. Боголюбов Н. Н. и Ширков Д. В. *Квантовые поля* М.: Наука, 1993, с. 40
10. Corson E M *Introduction to tensors, spinors, and reativistic wave-equation* NY, Hafner, 1953 p.71
11. Soper D. E., *Classical Field Theory* (N.Y.: Dover, 2008), p. 114
12. Соколов А А *Введение в квантовую электродинамику* М, ГИФМЛ 1958, с. 50
13. Khrapko R I "Does plane wave not carry a spin?" *Amer. J. Phys*. 69, 405 (2001) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=10&module=files

Absorption of the angular momentum of a plane electromagnetic wave

Radi I. Khrapko
Moscow Aviation Institute - Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia

It is demonstrated that a dielectric or magnetic, which absorbs a circularly polarized plane electromagnetic wave, absorbs the angular momentum, which is contained in the wave according to the canonical spin tensor of electrodynamics.