

# Спин, передаваемый зеркалу при отражении света

Р. И. Храпко\*

Московский авиационный институт, Москва, 125993

Рассмотрено падение на зеркало под углом  $\varphi$  и отражение от зеркала плоской электромагнитной волны круговой поляризации. Рассчитана передача спина волны зеркалу и, соответственно, плотность механического вращающего момента силы, воздействующего на зеркало.

**Ключевые слова:** круговая поляризация, тензор спина, плоская волна  
**PACS** 75.10.Hk

## 1. Введение

Садовский [1] в 1899 году и Пойнтинг[2] в 1909 году показали, что свет круговой поляризации несет, кроме энергии и импульса, момент импульса, *плотность* которого пропорциональна плотности энергии и импульса света.

**Ж.Н. Poynting:** If we put  $E$  for the energy in unit volume and  $G$  for the torque per unit area, we have  $G = E\lambda/2\pi$  [2, p. 565].

Сейчас плотности энергии и импульса света количественно описываются тензором энергии-импульса Максвелла  $T^{\mu\nu}$ , а плотность момента импульса воспринимается как плотность спина и описывается тензором спина  $Y^{\lambda\mu\nu}$  (см. ниже). В терминах фотонов, эти энергия, импульс и спин являются энергией, импульсом и спином фотонов.

Когда свет, то есть поток фотонов, отражается от зеркала при угле падения-отражения  $\varphi$ , импульс  $\mathbf{p}$  и спин  $\mathbf{S}$  фотонов меняют свое направление. В результате зеркало получает удвоенную нормальную составляющую импульса волны в виде давления и удвоенную касательную составляющую спина в виде распределенного момента силы. Дело в том, что при отражении спиральность волны меняется на противоположную, то есть взаимная ориентация импульса и спина меняется на противоположную (см. Рис. 1).

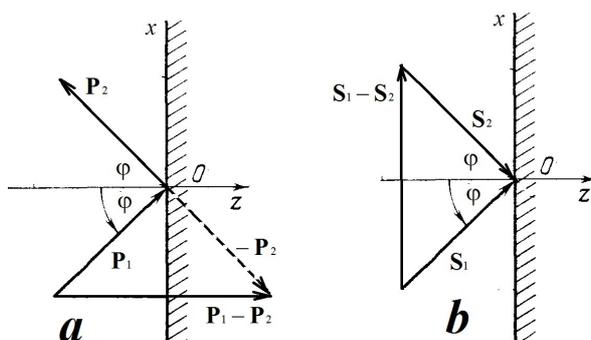


Рис. 1. **a** Импульс падающих и отраженных фотонов и импульс, полученный зеркалом  
**b** Спин падающих и отраженных фотонов и спин, полученный зеркалом

Упомянутое давление подсчитал Эйнштейн [3]. Оно пропорционально  $\cos^2 \varphi$ . Мы подсчитываем здесь плотность потока спина, то есть поверхностную плотность момента силы, действующую на зеркало.

Момент силы  $d\tau^{ij}$ , действующий на элемент поверхности  $da_k$ , есть

$$d\tau^{ij} = Y^{ijk} da_k. \quad (1.1)$$

Материал настоящей статьи был опубликован в [4].

\* Email: [khrapko\\_ri@hotmail.com](mailto:khrapko_ri@hotmail.com), <http://khrapkori.wmsite.ru>

## 2. Рассматриваемые электромагнитные волны

Чтобы написать выражение для волны, падающей под углом  $\varphi$  на  $xy$ -поверхность, будем исходить из выражения для электромагнитной волны правой круговой поляризации, распространяющейся вдоль оси  $z'$  декартовой системы координат  $x', y', z'$ :

$$E_1^{x'} = \cos(z'-t), \quad E_1^{y'} = -\sin(z'-t), \quad B_1^{x'} = \sin(z'-t), \quad B_1^{y'} = \cos(z'-t) \quad (2.1)$$

(для простоты мы положили  $\omega = k = c = \epsilon_0 = \mu_0 = 1$ ). Преобразование координат

$$x' = x \cos \varphi - z \sin \varphi, \quad z' = x \sin \varphi + z \cos \varphi, \quad y' = y \quad (2.2)$$

даёт выражение падающей под углом  $\varphi$  волны правой круговой поляризации:

$$E_1^x = \cos \varphi \cos(x \sin \varphi + z \cos \varphi - t), \quad B_1^x = \cos \varphi \sin(x \sin \varphi + z \cos \varphi - t), \quad (2.3)$$

$$E_1^y = -\sin(x \sin \varphi + z \cos \varphi - t), \quad B_1^y = \cos(x \sin \varphi + z \cos \varphi - t), \quad (2.4)$$

$$E_1^z = -\sin \varphi \cos(x \sin \varphi + z \cos \varphi - t), \quad B_1^z = -\sin \varphi \sin(x \sin \varphi + z \cos \varphi - t). \quad (2.5)$$

Чтобы написать выражения для волны, отраженной под углом  $\varphi$  от  $xy$ -поверхности, будем исходить из выражения для электромагнитной волны левой круговой поляризации, распространяющейся против оси  $z'$  декартовой системы координат  $x', y', z'$ :

$$E_2^{x'} = -\cos(z'+t), \quad E_2^{y'} = -\sin(z'+t), \quad B_2^{x'} = -\sin(z'+t), \quad B_2^{y'} = \cos(z'+t). \quad (2.6)$$

Преобразование координат

$$x' = x \cos \varphi + z \sin \varphi, \quad z' = -x \sin \varphi + z \cos \varphi, \quad y' = y \quad (2.7)$$

даёт выражение волны, отраженной под углом  $\varphi$ :

$$E_2^x = -\cos \varphi \cos(-x \sin \varphi + z \cos \varphi + t), \quad B_2^x = -\cos \varphi \sin(-x \sin \varphi + z \cos \varphi + t), \quad (2.8)$$

$$E_2^y = -\sin(-x \sin \varphi + z \cos \varphi + t), \quad B_2^y = \cos(-x \sin \varphi + z \cos \varphi + t), \quad (2.9)$$

$$E_2^z = -\sin \varphi \cos(-x \sin \varphi + z \cos \varphi + t), \quad B_2^z = -\sin \varphi \sin(-x \sin \varphi + z \cos \varphi + t). \quad (2.10)$$

Нетрудно убедиться, что на поверхности зеркала (идеальный проводник) выполняются граничные условия

$$\left[ E_1^x + E_2^x \right]_{z=0} = \left[ E_1^y + E_2^y \right]_{z=0} = \left[ B_1^z + B_2^z \right]_{z=0} = 0. \quad (2.11)$$

## 3. Тензор спина

Для описания плотности потока спина, канонический тензор спина [5-7]

$$Y_c^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu} \quad (3.1)$$

успешно применялся в работах [8,9]. (В формуле (3.1)  $A^\lambda$  есть магнитный векторный потенциал, и  $F^{\mu\nu}$  есть электромагнитный тензор). Однако для настоящей статьи существенно, что канонический тензор спина *неверно* описывает поток спина в направлениях, не совпадающих с направлением распространения волны. На это было указано в статьях [10,11]. Действительно, рассмотрим вместе с Сопером [6] волну

$$A^x = \cos(z-t), \quad A^y = -\sin(z-t).$$

$$E^x = -\sin(z-t), \quad E^y = -\cos(z-t), \quad B^x = \cos(z-t), \quad B^y = -\sin(z-t),$$

Подсчет компонентов канонического тензора спина даёт

$$Y_c^{xy} = A^x B^x = \cos^2(z-t), \quad Y_c^{yx} = A^y B^y = \sin^2(z-t).$$

Этот результат неадекватен действительности, поскольку означает существование потока спина в направлениях, перпендикулярных к направлению распространения самой волны.

Другой тензор спина был получен и использован в работах [10-12]

$$Y^{\lambda\mu\nu} = A^\lambda \partial^\nu A^\mu - A^\mu \partial^\nu A^\lambda. \quad (3.2)$$

Далее мы подсчитываем перенос спина в зеркало при использовании тензора спина (3.2)

#### 4. Плотность потока спинового момента импульса в зеркало

В соответствии с Рис. 1**b**, зеркало получает  $S^{yz}$  компоненту спина. Плотность потока этой компоненты спина на зеркало дается компонентой

$$Y^{yzz} = A^y \partial^z A^z - A^z \partial^z A^y \quad (4.1)$$

тензора спина, причем, в отсутствие интерференции, можно вычислить эту компоненту только для падающей волны и удвоить. По формуле  $\mathbf{A} = -\int \mathbf{E} dt$  получаем магнитные векторные потенциалы в падающей волне:

$$A_1^y = \cos(x \sin \varphi + z \cos \varphi - t), \quad A_1^z = -\sin \varphi \sin(x \sin \varphi + z \cos \varphi - t). \quad (4.2)$$

Таким образом, с учетом того, что  $\partial^z = -\partial_z$  из-за сигнатуры метрики (+ - - -), плотность потока спина на зеркало равна выражению

$$Y^{yzz} = 2(A_1^y \partial^z A_1^z - A_1^z \partial^z A_1^y) = \sin(2\varphi). \quad (4.3)$$

Эта величина представляет собой плотность распределённого момента силы.

#### 5. Механизм возникновения распределенного момента силы

Мы можем выразить момент силы  $d\tau^{yz}$ , действующий на площадку поверхности зеркала  $da_z$  через дивергенцию компоненты тензора спина (см. Рис. 2)

$$d\tau^{yz} = Y^{yzz} da_z = -\oint_{\partial dV} Y^{yzi} da_i = -\partial_i Y^{yzi} dV. \quad (5.1)$$

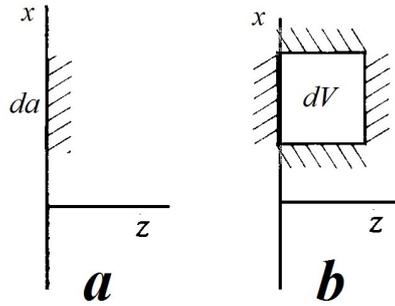


Рис. 2. **a** Площадка  $da$  выделена на зеркале.

**b** Площадка  $da$  дополняется до замкнутой поверхности, являющейся границей объема  $dV$  материала зеркала.

В формуле (5.1) предполагается интегрирование по границе объема  $dV$ , который получается замыканием площадки  $da_z$  внутри материала зеркала с изменением ориентации исходной площадки на противоположную. Поскольку

$$-\partial_\nu Y^{\lambda\mu\nu} = -2\partial_\nu (A^{[\lambda} \partial^{|\nu|} A^{\mu]}) = 2j^{[\lambda} A^{\mu]}, \quad (5.2)$$

и электромагнитный спин в зеркале не накапливается,  $\partial_i Y^{yzi} = 0$ , дивергенция компоненты тензора спина выражается через *плотность момента силы*  $[\mathbf{jA}]$ ,

$$-\partial_i Y^{yzi} = 2j^{iy} A^{z1} = [\mathbf{jA}]_x, \quad d\tau^{yz} = [\mathbf{jA}]_x dV \quad (5.3)$$

(здесь  $\mathbf{j}$  есть плотность тока, индуцируемого в зеркале). Эта плотность является аналогом плотности силы Лоренца [13 (33.7)],  $-\partial_i T^{ki} = j_i F^{ki} = [\mathbf{jB}]$ :

#### 6. Заключение

Приведенные расчеты показывают, что спин является таким же неотъемлемым свойством плоской электромагнитной волны круговой поляризации, как энергия и импульс. Поглощение спина вызывает плотность момента силы так же, как поглощение импульса вызывает плотность силы Лоренца, обеспечивающую давление волны.

Таким образом, показано преимущество концепции "Плотность спина пропорциональна плотности энергии" над концепцией "Плотность спина пропорциональна градиенту плотности энергии" [14].

Я бесконечно благодарен профессору Роберту Ромеру, отважно опубликовавшему мой вопрос: "Действительно ли плоская волна не несет спин?" [15].

### Список литературы

1. Sadowsky A. *Acta et Comm. Imp. Universitatis Jurievensis* 7, No. 1-3 (1899)
2. Poynting J. H., "The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light". *Proc. R. Soc. Lond. A* 82, 560-567 (1909)
3. Einstein A. Zur Elektrodynamik bewegter Körper *Annalen der Physik* 17, 891, 1905
4. Khrapko R.I. "Spin transferred to a mirror reflecting light" (2005)  
<http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34126> in Russian.
5. Corson E. M. *Introduction to tensors, spinors, and relativistic wave-equation* (NY, Hafner, 1953) p.71
6. Soper D. E., *Classical Field Theory* (N.Y.: Dover, 2008), p. 114
7. Barut A. O. *Electrodynamics and Classical Theory of Particles and Fields* (Macmillan, New York, 1964), p. 102.
8. Khrapko R.I. "Reflection of light from a moving mirror" *Optik* 136 (2017) 503–506
9. Khrapko R.I. "Absorption of angular momentum of a plane wave" *Optik* 154 (2018) 806–810
10. Khrapko R.I. "Mechanical stresses produced by a light beam" *J. Modern Optics*, 55, 1487-1500 (2008)
11. Khrapko R.I. "True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero" [arXiv:physics/0102084](https://arxiv.org/abs/physics/0102084)
12. Khrapko R.I. "Violation of the gauge equivalence" [arXiv:physics/0105031](https://arxiv.org/abs/physics/0105031)
13. Landau L. D., Lifshitz E. M. *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, N. Y. 1975)
14. Khrapko R. I. Absorption of Spin by a Conducting Medium *AASCIT Journal of Physics* Vol. 4, No. 2, Page: 59-63 (2018)
15. Khrapko R I "Does plane wave not carry a spin?" *Amer. J. Phys.* 69, 405 (2001)

### Spin Transferred to a Mirror Reflecting Light

Radi I. Khrapko

We consider the incidence of a plane circularly polarized electromagnetic wave on a mirror at an angle  $\varphi$ . We have calculated the transfer of the momentum and the spin angular momentum to the mirror and, accordingly, the pressure and density of the torque on the mirror. The given calculations show that spin is a natural property of a plane electromagnetic wave, similar to energy and momentum.

### ЖЭТФ Letters Письма в ЖЭТФ

21.09.2018

Многоуважаемый Р.И.Храпко,

Ваша статья "Спин, передаваемый зеркалу при отражении света" [rxVf-5610f](https://arxiv.org/abs/physics/0102084) была рассмотрена на заседании Редколлегии от 20.09.2018.

Редколлегия приняла решение отклонить Вашу статью на основании полученной рецензии. Выдержка из рецензии прилагается.

Зав.редакцией "Писем в ЖЭТФ" И. Подыниглазова

Отзыв на статью.

В своей статье автор вычисляет момент, передаваемый зеркалу при косом отражении "закрученного" света, т.е. света, обладающего угловым моментом. Это вызывает недоумение, потому что этот результат известен, он был получен ранее для Лагерр-Гауссовых пучков, см. например, монографии J.P. Torres, L. Torner, "Twisted Photons: Applications of Light with Orbital Angular Momentum" или D.L. Andrews, M. Babiker, "The Angular Momentum of Light", или в статье PRA 84, 033813 (2011).

Поскольку полученный в статье результат уже известен и опубликован, считаю, что эту статью НЕ стоит публиковать в Письмах в ЖЭТФ [А.Л.Барабанов].