

Незамеченное излучение вращающегося диполя

Р. И. Храпко¹

Московский авиационный институт, Москва, 125993

Вращающийся диполь создает в окрестности оси вращения излучение спина, не замеченное ранее. Этот поток спина по величине составляет половину потока момента импульса, который исходит, согласно современному представлению, от вращающегося диполя в окрестности плоскости вращения и который рассматривается в статье как поток орбитального момента импульса. Подсчитана реакция электромагнитного поля на вращающийся диполь. Она равна суммарному потоку момента импульса, спиновый + орбитальный, с обратным знаком.

PACS: 75.10.Hk; 03.50.De

1. Спин электромагнитной волны

Согласно [1-6] электромагнитная волна круговой поляризации содержит *плотность* потока момента импульса, которая пропорциональна плотности потока энергии, то есть вектору Пойнтинга, и не зависит от коллимирования электромагнитной волны. Этот факт подтвержден экспериментально [7-10]: движение интерференционных полос в этих опытах происходило во всех точках освещенной области.

Пойнтинг пишет: "If we put E for the energy in unit volume and G for the torque per unit area, we have $G = E\lambda/2\pi G$ " [2, p. 565]. Это означает, что поглотитель волны круговой поляризации испытывает специфические механические напряжения, вызываемые объемной плотностью момента силы. Такие напряжения были детально рассмотрены в [3]. Если поглотителем является электропроводящая среда, то эта объемная плотность момента силы дается выражением [11-14]

$$\tau_{\wedge} = \mathbf{j} \times \mathbf{A}, \quad (1)$$

которое аналогично формуле для объемной плотности силы Лоренца $f_{\wedge} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ (здесь \mathbf{j} и \mathbf{A} суть плотность электрического тока и векторный магнитный потенциал, соответственно, а индекс \wedge означает «плотность»).

В настоящее время объемная плотность и плотность потока момента импульса в электромагнитной волне круговой поляризации рассматриваются как плотности *спина* и описываются тем или другим тензором спина [3, 14-20], см. далее (11). При этом определение тензора спина никак не связано с коллимированием электромагнитной волны.

2. Излучение энергии вращающимся диполем

Как известно, вращающийся электрический диполь или пара осциллирующих диполей, перпендикулярных друг к другу и имеющих сдвиг осцилляции во времени на четверть периода,

$$d^x = d \exp(-i\omega t), \quad d^y = id \exp(-i\omega t), \quad (2)$$

излучает электромагнитные волны. Мощность P излучения и его угловое распределение даются известными формулами [21, § 67]:

$$P = \omega^4 d^2 / (6\pi c^3 \epsilon_0), \quad (3)$$

$$dP/d\Omega = \omega^4 d^2 (\cos^2 \theta + 1) / (32\pi^2 c^3 \epsilon_0), \quad (4)$$

($d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$, и мы используем систему единиц, в которой $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho / \epsilon_0$). Диаграмма направленности излучения, в соответствии с (4), представлена на Рис. 1. См. также [22] Fig.2.6.

¹ Email: khrapko_ri@hotmail.com, khrapko_ri@mai.ru, <http://khrapkori.wmsite.ru>

3. Поток момента импульса

Кроме энергии, поле вращающегося диполя содержит радиально направленный поток момента импульса относительно оси z . Величина этого потока и его угловое распределение даются известными формулами

$$\tau_L = dL_z / dt = \omega^3 d^2 / (6\pi c^3 \epsilon_0), \quad (5)$$

$$dL_z / dt d\Omega = \omega^3 d^2 \sin^2 \theta / (16\pi^2 c^3 \epsilon_0) \quad (6)$$

Формула (5) – это формула (75,7) из [21], а формула (6) – это формула (3.4) из [20] или (14) из [23]. Обе формулы также представлены с выводами в работах [23-29]. Диаграмма направленности потока момента импульса представлена на Рис. 2. Эта диаграмма имеет непосредственный физический смысл так же, как и диаграмма направленности излучения энергии, которая является просто диаграммой направленности радиотехнической антенны

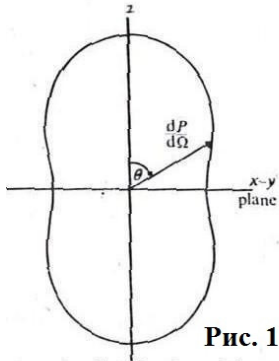


Рис. 1. Угловое распределение потока энергии
 $dP / d\Omega \propto (\cos^2 \theta + 1)$

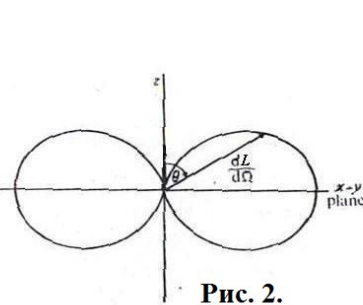


Рис. 2. Угловое распределение z-компоненты потока момента импульса
 $dL_z / dt d\Omega \propto \sin^2 \theta$

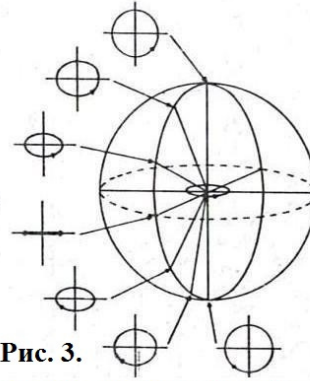


Рис. 3. Поляризация электрического поля вращающегося диполя при наблюдении с различных направлений

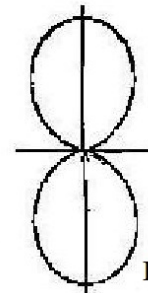


Рис. 4. Угловое распределение z-компоненты потока спина
 $dS_z / dt d\Omega \propto \cos^2 \theta$

Излучение вращающегося диполя, направленное вдоль оси вращения, поляризовано по кругу, а излучение в плоскости вращения имеет линейную поляризацию (см. Рис. 3). Именно в окрестности этой плоскости располагается поток момента импульса, согласно (6). Таким образом, поток (5) не связан с круговой поляризацией. Поэтому, в соответствии с работами [1-19], этот поток является потоком орбитального момента импульса, а не спина.

Кроме того, этот поток момента импульса нельзя считать излучением, потому что он, как известно [20, 23, 30], определяется радиальной составляющей электрического поля, которой нет в волновой зоне. Например, Гайтлер [30] пишет: “The angular momentum is not contained in the pure wave zone, where the field strengths are perpendicular to \mathbf{r} and behave like $1/r$. In this zone, indeed, L_z vanishes: L_z is proportional to E^r and $E^r \sim 1/r^2$ ”.

4. Излучение спина в рамках классической электродинамики

Напротив, интенсивное излучение в окрестности оси вращения диполя (см. Рис. 1), имеющее поляризацию, близкую к круговой, должно содержать поток *спинового* момента импульса, в соответствии с [1-19].

Для подсчета излучения этого спина естественно использовать электромагнитное поле вращающегося диполя в волновой зоне [31,32], учитывая, что $A^i = -\int E^i dt = -iE^i / \omega$:

$$E^\theta = (d\omega^2 / r^2) \cos \theta e^{i(\varphi+kr-\omega t)} / (4\pi c^2 \epsilon_0), \quad E^\varphi = (id\omega^2 / r^2) e^{i(\varphi+kr-\omega t)} / (4\pi c^2 \epsilon_0 \sin \theta), \quad (7)$$

$$B_{r\theta} = d\omega^2 \cos \theta e^{i(\varphi+kr-\omega t)} / 4\pi c, \quad B_{\varphi r} = -id\omega^2 \sin \theta e^{i(\varphi+kr-\omega t)} / 4\pi c, \quad (8)$$

$$A^\theta = (-id\omega / r^2) \cos \theta e^{i(\varphi+kr-\omega t)} / (4\pi c^2 \epsilon_0), \quad A^\varphi = (d\omega / r^2) e^{i(\varphi+kr-\omega t)} / (4\pi c^2 \epsilon_0 \sin \theta). \quad (9)$$

Используются сферические координаты с метрикой

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta, \quad \sqrt{g} = r^2 \sin \theta. \quad (10)$$

Для канонического тензора спина [15-17,20],

$$Y^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} F^{\mu]\nu}, \quad (11)$$

имеем радиальную компоненту плотности потока спина

$$Y^{\theta\varphi r} = \Re\{A^\theta \bar{B}^{\varphi r} - A^\varphi \bar{B}^{\theta r}\} / 2$$

$$= d^2 \Re\{-ii + 1\} \omega^3 \cos \theta / (32\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^4 \sin \theta) = d^2 \omega^3 \cos \theta / (16\pi^2 c^3 \epsilon_0 r^4 \sin \theta). \quad (12)$$

z-компонента потока спина через элементарную площадку da_k получается дуализацией три-вектора $\hat{z}^l Y^{ijk} da_k$, где $\hat{z}^l = \{\hat{z}^r = \cos \theta, \hat{z}^\theta = -(\sin \theta)/r, \hat{z}^\varphi = 0\}$ есть единичный z-вектор, а $da_k = da_r = r^2 d\Omega$. Эта дуализация выполняется при помощи антисимметричного тензора $\sqrt{g} \epsilon_{ijk}$. В нашем случае получается следующее угловое распределение z-компоненты потока спина вращающегося диполя (см. Рис. 4).

$$d^3 S_z / dt = \hat{z}^r Y^{\theta\varphi r} \sqrt{g} \epsilon_{r\theta\varphi} da_r = d^2 \omega^2 \cos^2 \theta d\Omega / (16\pi^2 c^3 \epsilon_0). \quad (13)$$

Интегральная z-компонента потока спина есть

$$\tau_s = dS_z / dt = \int d^2 \omega^3 \cos^2 \theta d\Omega / (16\pi^2 c^3 \epsilon_0) = d^2 \omega^3 / (12\pi c^3 \epsilon_0). \quad (14)$$

Этот результат был представлен в [25, 27, 28]

Таким образом, полный поток момента импульса от вращающегося диполя, орбитальный (5) + спиновый (14), равен

$$dJ_z / dt = dL_z / dt + dS_z / dt = \omega^3 d^2 / 6\pi \epsilon_0 c^3 + \omega^3 d^2 / 12\pi \epsilon_0 c^3 = \omega^3 d^2 / 4\pi \epsilon_0 c^3. \quad (15)$$

Заметим, что вдоль оси Z, для $\theta = 0$, то есть там, где нет орбитального момента импульса, выполняется соотношение для фотона, (энергия) = ω (спин):

$$dP/d\Omega = \omega^4 d^2 / (16\pi^2 c^3 \epsilon_0) \quad (4); \quad dS/dtd\Omega = \omega^3 d^2 / (16\pi^2 c^3 \epsilon_0) \quad (13)$$

5. Излучение спина в рамках квантовой механики

Фейнман [33] применил простой способ подсчета излучения спина (13), находящийся, правда, вне рамок классической электродинамики. Действительно, согласно [33 (18.1), (18.2)], амплитуда право поляризованного фотона и лево поляризованного фотона, которые эмитируются в направлении θ , равны, соответственно,

$$\alpha(1 + \cos \theta) / 2 \quad \text{и} \quad -\alpha(1 - \cos \theta) / 2 \quad (16)$$

(мы заменили букву a Фейнмана на α). Поэтому плотность потока спина в направлении θ пропорциональна величине

$$[\alpha(1 + \cos \theta) / 2]^2 - [\alpha(1 - \cos \theta) / 2]^2 = \alpha^2 \cos \theta. \quad (17)$$

Проекция этой плотности потока спина на ось z равна, в согласии с (13),

$$d^3 S_z / d\Omega dt \propto \alpha^2 \cos^2 \theta. \quad (18)$$

Между прочим, выражения (16) дают правильное распределение мощности излучения(4)

$$dP/d\Omega \propto [\alpha(1 + \cos \theta) / 2]^2 + [\alpha(1 - \cos \theta) / 2]^2 = \alpha^2 (1 + \cos^2 \theta) / 2. \quad (19)$$

6. Воздействие на диполь, испускающий поток момента импульса

При испускании потока момента импульса (15), вращающийся диполь должен испытывать момент силы противоположного направления. Мы подсчитываем здесь момент силы, который испытывают диполи нашей пары (2), используя формулу (1) в виде

$$d\tau = Id\mathbf{l} \times \mathbf{A}. \quad (20)$$

Здесь $d\tau$ это момент силы, действующий на отрезок $d\mathbf{l}$ провода, по которому течет ток I .

Рассматриваемые здесь диполи являются «элементарными вибраторами» в том смысле, что ток одинаков во всех точках, а заряды находятся только на концах. Ток диполей получается дифференцированием соотношения $d = ql$. На основании (2), получаем

$$I^x = \partial_t d^x / l = -i\omega \exp(-i\omega t) / l, \quad I^y = \partial_t d^y / l = d\omega \exp(-i\omega t) / l. \quad (21)$$

Для расчета воздействия на x-диполь (он расположен на Рис. 5 горизонтально) рассматриваем элемент dy y-диполя. Протекающий по элементу dy ток I^y создаст около элемента dx x-диполя запаздывающий векторный потенциал

$$dA^y = I^y dy \exp(i\omega r) / 4\pi r = d\omega dy \exp[i\omega(r-t)] / 4\pi r l \quad (22)$$

По формуле (20), это дает момент силы, действующий на элемент dx x -диполя, равный

$$d^2\tau^{xy} = \Re\{\bar{I}^x dx dA^y\} \frac{1}{2} = \Re\{i \exp(i\omega t) \exp[i\omega(r-t)]\} \frac{d^2\omega^2 dx dy}{8\pi r l^2} = -\sin \omega r \frac{d^2\omega^2 dx dy}{8\pi r l^2} \quad (23)$$

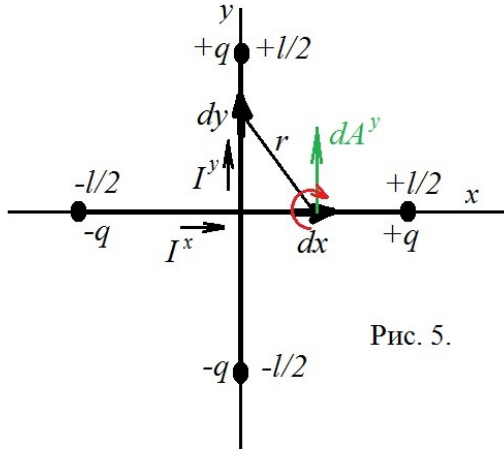


Рис. 5.

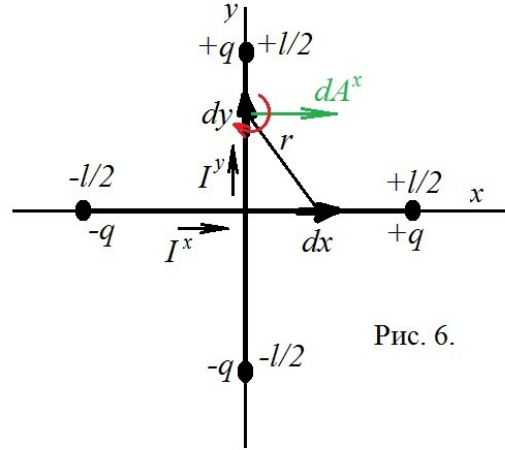


Рис. 6.

Для маленького диполя заменяем $\sin \omega r \rightarrow \omega r$, сокращаем на r (!), интегрируем по x, y в пределах $-l/2, +l/2$ и получаем

$$\text{для } x\text{-диполя } \tau^{xy} = -d^2\omega^2 / 8\pi. \quad (24)$$

Такой же момент силы испытывает y -диполь (см. Рис. 6.). Действительно

$$dA^x = I^x dx \exp(i\omega r) / 4\pi r = -i d\omega dx \exp[i\omega(r-t)] / 4\pi r l \quad (25)$$

$$d^2\tau^{xy} = -\Re\{\bar{I}^y dy dA^x\} \frac{1}{2} = \Re\{\exp(i\omega t) i \exp[i\omega(r-t)]\} \frac{d^2\omega^2 dx dy}{8\pi r l^2} = -\sin \omega r \frac{d^2\omega^2 dx dy}{8\pi r l^2} \quad (26)$$

$$\text{для } x\text{-диполя } \tau^{xy} = -d^2\omega^2 / 8\pi. \quad (27)$$

Складывая результаты (24) и (27), получаем

$$\text{для вращающегося диполя } \tau^{xy} = -d^2\omega^2 / 4\pi, \quad (28)$$

что совпадает по величине с полным потоком момента импульса (орбитальный + спиновый), исходящим от вращающегося диполя (15).

Кулоновское взаимодействие между зарядами диполей за счет электрического поля, а также воздействие силы Лоренца на диполи за счет магнитного поля, не может дать отличный от нуля результат, потому что эти поля, в отличие от поля \mathbf{A} , увеличиваются как $1/r^2$ при уменьшении размера диполя, и воздействие стремилось бы к бесконечности.

7. Заключение

Подсчет излучения спина вращающимся диполем доказывает, что тензор спина классической электродинамики имеет реальное физическое значение и должен использоваться, в частности, при описании спина плоских волн.

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за отважную публикацию моего вопроса [34] (вопрос был направлен в редакцию 07.10.1999) и профессору Тимо Ниеминену за содержательные дискуссии в прошлом.

Список литературы

1. Sadowsky A. *Acta et Comm. Imp. Universitatis Jurievensis* 7, No. 1-3 (1899)
2. Poynting J. H., "The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light". *Proc. R. Soc. Lond. A* 82, 560-567 (1909)
3. Khrapko R.I. "Mechanical stresses produced by a light beam" *J. Modern Optics*, 55, 1487-1500 (2008)

4. Khrapko R.I. "Reflection of light from a moving mirror" *Optik* 136 (2017) 503-506
5. Khrapko R.I. "Absorption of angular momentum of a plane wave" *Optik* 154 (2018) 806-810
6. Crawford F.S., Jr., *Waves: Berkley Physics Course*, V. 3 (Berkeley, California, 1968), p. 365.
7. Righi A., *Mem. d. Accad. d. Scienze di Bologna*, 4 (1882), 247
8. Atkinson R., *Phys. Rev.*, 47 (1935), 623
9. Henriot E, *Comptes rendus* 198, 1146 (1934).
10. Wood R., *Physical Optics*, 2nd ed., p. 341.
11. Храпко Р.И. «Тензор спина электромагнитного поля». Поступило в редакцию журнала Письма вЖЭТФ 15.05.1998 <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=170&module=files>
12. Храпко Р.И. «Поглощение света в электропроводящей среде». <http://trudymai.ru/published.php?ID=34247> (2004)
13. Храпко Р.И. Спин, передаваемый зеркалу при отражении света <http://trudymai.ru/published.php?ID=34126> (2005)
14. Khrapko R.I. "Absorption of Spin by a Conducting Medium", *AASCIT Journal of Physics* Vol.4, No. 2, Publication Date: May 16, 2018, Page: 59-63
15. Soper D. E., *Classical Field Theory* (N.Y.: Dover, 2008), p. 114.
16. Corson E M *Introduction to tensors, spinors, and reativistic wave-equation* NY, Hafner, 1953, p.71
17. Barut A. O. *Electrodynamics and Classical Theory of Particles and Fields* (Macmillan, New York, 1964), p. 102
18. Khrapko R.I. «True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero». - <http://arXiv.org/abs/physics/0102084> (2001)
19. Khrapko R.I. «Violation of the gauge equivalence». - <http://arXiv.org/abs/physics/0105031> (2001)
20. Барабанов А. Л. «Об угловом моменте в классической электродинамике» *УФН* 163, 77 (1993)
21. Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
22. Corney A., *Atomic and Laser Spectroscopy* (Oxford University Press, 1977).
23. Вульфсон К.С. «О моменте количества движения электромагнитных волн» *УФН* 152 667 (1987)
24. Храпко Р.И. «Плотность спина электромагнитных волн». <http://trudymai.ru/published.php?ID=34691> (2001)
25. Храпко Р.И. «Спиновый момент импульса дипольного излучения». <http://trudymai.ru/published.php?ID=34635> (2001)
26. Храпко Р.И. «Угловое распределение момента импульса поля вращающегося диполя». Поступило в редакцию журнала ЖЭТФ 25.05.2000 <http://khrapkorL.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=171&module=ffles>
27. Khrapko R.I. "Radiation of spin by a rotator". <http://www.ma.utexas.edu/cgi-bin/mps?key=03-315> (2003)
28. Храпко Р.И. «Спин не есть момент импульса» <http://trudymai.ru/published.php?ID=28834> (2012).
29. Зоммерфельд А. *Строение атома и спектры*. (М.: Гостехиздат, 1956) Т. 1. С. 556
30. Heitler W., *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford: Clarendon, 1954) p. 401.
31. Сивухин Д. В., *Общий курс физики, том 3, часть 2* (М.: Наука, 1996)
32. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, (John Wiley, 1999), p. 411.
33. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, London, 1965) Vol. 3.
34. Khrapko R.I. "Does plane wave not carry a spin?" *Amer. J. Phys.* 69, 405 (2001)

Ответ на

Рецензию на статью Р.И. Храпко "Незамеченное излучение вращающегося диполя"

Уважаемая редакция, главным результатом представленной статьи является доказательство того, что суммарный поток углового импульса, орбитальный + спиновый, в согласии с законом сохранения углового импульса, равен моменту сил, приложенному к вращающемуся диполю. Этот результат не оспаривается рецензентом. Прошу пересмотреть решение редакции.

При переработке статьи вставлен угол θ под знак синуса, но (бывшие) формулы (3) и (4) не изменены, т.к. они верны, вопреки мнению рецензента.

Дифференциальный поток углового импульса, формула (3) совпадает с формулой (3.4) статьи А.Л. Барабанова и с соответствующей формулой статьи К.С. Вульфсона, а интегральный поток углового импульса, формула (4), совпадает с формулой (75.7) 2-го тома Ландау-Лифшица и с формулами (3.3) и (2.2) статьи А.Л. Барабанова. Внешнее различие формул объясняется использованием различных систем единиц. Формулы ЛЛ надо делить на 4π для получения формул из Jackson'a (1998) или из Савельева (1970), поскольку у ЛЛ $\text{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$.

Добавлены выражения для дифференциального и интегрального потоков энергии, причем дифференциальный поток энергии есть просто компонента тензора энергии-импульса.

Добавление сделано в связи с обычной идейной путаницей, проявленной рецензентом: говорят о неоднозначности тензора энергии-импульса и одновременно отмечают, что для дифференциального потока энергии существует «хорошее» выражение.

Дифференциальный поток энергии представлен на диаграмме направленности излучения энергии (Рис. 1). Эта диаграмма имеет самый непосредственный физический смысл как диаграмма направленности радиотехнической антенны. Ошибкой является считать физически значимым только интегральный поток энергии и игнорировать распределение излучения по направлению, как это предлагает А.Л. Барабанов со ссылкой на [12]. Эта ошибка разобрана в статье Храпко Р. И., «Локализация энергии-импульса и спин» *Вестник Российского университета дружбы народов*, Серия Физика. – 2002, № 10(1).- с.35-39.

<http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=32&module=files>

Выражения для дифференциального и интегрального потоков углового импульса, это бывшие формулы (3), (4), непосредственно и однозначно получаются из максвелловского тензора энергии-импульса и совпадают с формулами (3.4), (2.2), (3.3) статьи А.Л. Барабанова.

Дифференциальный поток углового импульса представлен на диаграмме направленности потока углового импульса (Рис. 2). Эта диаграмма имеет непосредственный физический смысл так же, как и диаграмма направленности излучения энергии. Согласно этой диаграмме направленности, плотность потока углового импульса максимальна в плоскости вращения диполя и равна нулю вдоль оси вращения, там, где максимальна мощность излучения и излучение имеет круговую поляризацию. А.Л. Барабанов рассматривает это свойство диаграммы направленности как *странность* со ссылкой на [1] и на этом оснований лишает смысла дифференциальный поток углового импульса и свою формулу (3.4), вслед за лишением смысла дифференциального потока энергии. А.Л. Барабанов настаивает, что следует «считать физически значимым только интегральный поток углового момента».

В действительности, эта наша формула (3) и формула (3.4) статьи А.Л. Барабанова описывает реальный поток *орбитального* углового импульса, не связанного с круговой поляризацией, тогда как вдоль оси дополнительно испускается незамеченное излучение *спинового* углового импульса, о чем идет речь в представленной статье. Удивительно, что рецензент отрицает реальность этого дополнительного излучения вдоль оси, хотя оно легко подсчитывается с

помощью тензора спина, который общеизвестен и выписан у Барабанова – формула (4.2). Тензор спина, однако, не применяется физиками. Причина игнорирования тензора спина разобрана в новой статье Khrapko “Absorption of Spin by a Conducting Medium” *AASCIT Journal of Physics* Vol.4 , No. 2, Publication Date: May 16, 2018, Page: 59-63 <http://www.aascit.org/journal/archive2?journalId=977&paperId=6355>

Суммарный поток углового импульса, орбитальный + спиновый, в согласии с законом сохранения углового импульса, равен моменту силы, приложенному к вращающемуся диполю с обратным знаком. Это является главным результатом представленной статьи.

%

В работе Храпко есть откровенные ошибки технического характера (не говоря уже об обычной идейной путанице). Формулы (3) и (4) нужно умножить на $4\pi r_i$, чтобы получился правильный ответ (в (3) также потерял угол θ под синусом, но это просто опечатка). Формула (4) - это должно быть следствием формулы (75.7) 2-го тома Ландау-Лифшица, если диполь d (у Храпко p) вращается в плоскости с частотой ω , причем поразительно, что Храпко ссылается на (75.7)! Но хуже всего то, что в работе нет ничего последовательно выведенного.

Дело в том, что в классической электродинамике не получается "хорошее" (интуитивно понятное) выражение для дифференциального потока углового момента электромагнитного поля (для дифференциального потока энергии такое выражение существует - это вектор Пойнтинга). Неоднозначность в записи дифференциального потока углового момента связана с неоднозначностью тензора углового момента (аналогичной неоднозначности тензора энергии-импульса).

Отсутствие "хорошего" выражения приводит к кажущимся парадоксам. Но именно кажущимся: каким бы выражением мы ни пользовались, если аккуратно применить закон сохранения углового момента, то всегда все сходится.

Мы рекомендуем автору сравнить свои формулы с формулами статьи А. Барабанова (УФН, 1993). В статье Барабанова формула (75.7) из Л.-Л. записана в форме (2.2), а аналогом формулы (3) Храпко является дифференциальный поток, определенный выражениями (3.3), (3.4). Неприятность, связанная с этим дифференциальным потоком, которую автор упоминает перед формулой (3), у Барабанова обсуждается после (3.3), (3.4).

В принципе, воспользовавшись неоднозначностью тензора углового момента, можно ввести другой диф-

ференциальный поток углового момента. В статье Барабанова (УФН, 1993) - это поток "канонического углового момента", определенный формулой (2.13). Но это не решает полностью ту неприятность, о которой шла речь выше. Об этом написано в монографии Барабанова 2010 года. Можно предположить, что Храпко, записывая формулу (5), что-то такое и имеет в виду. Однако представляется, что это просто часть потока "канонического углового момента", имеющая "нужную" зависимость от θ (такая часть действительно существует), однако куда делась другая часть? Т.е. это как раз то, о чем написано выше: нет ничего последовательно выведенного. Кроме того, не имеет никакого смысла складывать потоки угловых моментов, которые были по-разному определены (как это делается в формуле (7)).

Формула (5) дана без вывода, ее предваряют только ссылки на неопубликованные статьи автора 21, 22, 24, 25.

Окончание статьи про "отрицание тензора спина" - также ошибочное. В статье Барабанова (УФН, 1993) этот тензор выписан - формула (4.2) - со ссылками. Этот вопрос обсуждается также, в монографиях Боголюбова и Ширкова, Ахиезера и Берестецкого. Этот тензор возникает там, где пользуются каноническим тензором углового момента (не тем, который используется у Л.-Л.).

Не рекомендую публиковать рецензируемую статью.