Подсчет излучения электрического диполя

Р. И. Храпко[1]

Московский авиационный институт, Москва, 125993

Подсчет энергии излучения осциллрующего диполя выполнен в терминах тока диполя и электрического поля в его окрестности в соответствии с формулой *P=jE*
Представленный подсчет доказывает верность метода, которым ранее было подсчитано излучение спина вращающимся диполем.

PACS: 03.50.De

Мощность излучения P диполя $\mathbf{d}$ обычно подсчитывают, интегрируя вектор Пойнтинга по поверхности, окружающей диполь в волновой зоне [1 (67.8), 2 (9.24)]:

$$P = \omega^4 \mathrm{d}^2 /(12\pi\varepsilon_0 c^3)\,. \tag{1}$$

Представляет однако интерес получить величину (1) в качестве результата воздействия электромагнитного поля на сам диполь, согласно формуле для плотности возникающей мощности

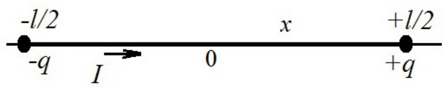
$$P_\wedge = -(\mathbf{j}\cdot\mathbf{E})\,; \tag{2}$$

здесь $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ суть плотность тока, протекающего по диполю, и напряженность электрического поля на территории диполя, соответственно, а индекс $\wedge$ у $P_\wedge$ означает «плотность». Важность такого метода подсчета была продемонстирована в работе [3], где рассматривалось воздействие электромагнитного поля на вращающийся диполь при подсчете испускаемого момента импульса.

Электрическое поле около диполя вычисляется по известной формуле, учитывающей запаздывание [2 (6.55)]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \left\{ \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}[\rho(\mathbf{x}',t')]_{\text{ret}} + \frac{\hat{\mathbf{r}}}{cr}[\partial_{t'}\rho(\mathbf{x}',t')]_{\text{ret}} - \frac{1}{c^2 r}[\partial_{t'}\mathbf{j}(\mathbf{x}',t')]_{\text{ret}} \right\}, \tag{3}$$

а в качестве диполя рассматривается «элементарный вибратор», ток I которого одинаков во всех точках, а заряды находятся только на концах (см. рисунок).



$$\breve{\mathrm{d}} = \breve{q}l = ql\exp(-i\omega t)\,, \tag{4}$$

Выражение (4) есть комплексный дипольный момент (символ *бреве* отмечает комплексные величины). Ток диполя I получается дифференцированием:

$$\breve{I} = \partial_t \breve{\mathrm{d}}/l = -i\omega q\exp(-i\omega t)\,. \tag{5}$$

Первое слагаемое выражения (3) есть просто запаздывающее кулоновское поле в точке x. Поэтому, заменяя $d^3x'\rho \to d\breve{q}'$ и учитывая направление поля, получим напряженность электрического поля от обоих зарядов в точке x:

$$E_1^x = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{-\exp[-i\omega t + i\omega(l/2+x)/c]}{(l/2+x)^2} - \frac{\exp[-i\omega t + i\omega(l/2-x)/c]}{(l/2-x)^2}\right]. \tag{6}$$

Соответствующий вклад этого слагаемого в порождаемую диполем мощность дает формула (2) (мы заменяем $jd^3x \to Idx$)

[1] Email: khrapko_ri@hotmail.com, khrapko_ri@mai.ru , http://khrapkori.wmsite.ru

$$P_1=\frac{-1}{2}\int_{-l/2}^{l/2}dx\Re\{\bar{I}E_1\}$$
$$=-\frac{\omega q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}dx\Re\left\{i\exp(i\omega t)\left[\frac{-\exp[-i\omega t+i\omega(l/2+x)/c]}{(l/2+x)^2}-\frac{\exp[-i\omega t+i\omega(l/2-x)/c]}{(l/2-x)^2}\right]\right\}$$
$$=-\frac{\omega q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}dx\left[\frac{\sin[\omega(l/2+x)/c]}{(l/2+x)^2}+\frac{\sin[\omega(l/2-x)/c]}{(l/2-x)^2}\right]. \qquad (7)$$

Учитывая малый размер диполя, ограничимся двумя членами разложения синуса в ряд

$$P_1=-\frac{\omega q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{-l/2}^{l/2}dx\left[\frac{\omega}{c(l/2+x)}-\frac{\omega^3(l/2+x)}{6c^3}+\frac{\omega}{c(l/2-x)}-\frac{\omega^3(l/2-x)}{6c^3}\right]. \qquad (8)$$

Аналогично находим электрическое поле, обеспечиваемое вторым слагаемым формулы (3)

$$E_2^x=\frac{i\omega q}{4\pi\varepsilon_0 c}\left[\frac{\exp[-i\omega t+i\omega(l/2+x)/c]}{(l/2+x)}+\frac{\exp[-i\omega t+i\omega(l/2-x)/c]}{(l/2-x)}\right]. \qquad (9)$$

Формула (2) дает вклад этого слагаемого в порождаемую диполем мощность

$$P_2=\frac{\omega^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c}\int_{-l/2}^{l/2}dx\Re\left\{\exp(i\omega t)\left[\frac{\exp[-i\omega t+i\omega(l/2+x)/c]}{(l/2+x)}+\frac{\exp[-i\omega t+i\omega(l/2-x)/c]}{(l/2-x)}\right]\right\}$$
$$=\frac{\omega^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c}\int_{-l/2}^{l/2}dx\left[\frac{\cos[\omega(l/2+x)/c]}{(l/2+x)}+\frac{\cos[\omega(l/2-x)/c]}{(l/2-x)}\right]. \qquad (10)$$

Ограничиваясь двумя членами разложения косинуса в ряд, имеем

$$P_2=\frac{\omega^2 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c}\int_{-l/2}^{l/2}dx\left[\frac{1}{(l/2+x)}-\frac{\omega^2(l/2+x)}{2c^2}+\frac{1}{(l/2-x)}-\frac{\omega^2(l/2-x)}{2c^2}\right]. \qquad (11)$$

Удивительным образом, расходящиеся на концах диполя интегралы сокращаются при сложении P_1+P_2, а остающиеся члены оказываются константами. Поскольку $l/6-l/2=-l/3$, эта часть мощности равна

$$P_1+P_2=-\frac{\omega^2\mathrm{d}^2}{24\pi\varepsilon_0 c^3}. \qquad (12)$$

Третье слагаемое формулы (3) использует производную тока

$$\partial_t\breve{I}=-\omega^2 q\exp(-i\omega t). \qquad (13)$$

Для вычисления напряженности в точке x, мы разделили область интегрирования на две части

$$E_3^x=-\frac{\omega^2 q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left\{\int_{-l/2}^{x}dx'\frac{-\exp[-i\omega t+i\omega(x-x')/c}{x-x'}+\int_{x}^{l/2}dx'\frac{-\exp[-i\omega t+i\omega(x'-x)/c}{x'-x}\right\}$$

По формуле (2), используя ток (5), получаем мощность, соответствующую третьему члену формулы (3)

$$P_3=-\frac{\omega^3 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{-l/2}^{l/2}dx\Re\left\{i\omega\exp(i\omega t)\left[\int_{-l/2}^{x}dx'\frac{\exp[-i\omega t+i\omega(x-x')/c]}{x-x'}+\int_{x}^{l/2}dx'\frac{\exp[-i\omega t+i\omega(x'-x)/c]}{x'-x}\right]\right\}$$
$$=-\frac{\omega^3 q^2}{8\pi\varepsilon_0 c^2}\int_{-l/2}^{l/2}dx\left[\int_{-l/2}^{x}dx'\frac{-\sin[\omega(x-x')/c]}{x-x'}+\int_{x}^{l/2}dx'\frac{-\sin[\omega(x'-x)/c]}{x'-x}\right]. \qquad (14)$$

Ограничиваясь одним членом разложения синуса в ряд, без труда получаем

$$P_3=\frac{\omega^4\mathrm{d}^2}{8\pi\varepsilon_0 c^3}. \qquad (15)$$

Таким образом, излучаемая диполем мощность равна величине (1)

$$P=P_1+P_2+P_3=\omega^4\mathrm{d}^2/(12\pi\varepsilon_0 c^3). \qquad (16)$$

Заметим, что мощность, излучаемая *вращающимся* диполем, вдвое больше этой величины [1 § 67],

$$P_{\mathrm{rot}} = \frac{\omega^4 \mathrm{d}^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\,. \qquad (16)$$

При этом, поток момента импульса, испускаемый вращающимся диполем, равен [3]

$$\tau = \frac{J}{t} = \frac{\omega^3 \mathrm{d}^2}{4\pi\varepsilon_0 c^3}\,. \qquad (17)$$

Нарушение для вращающегося диполя обычного равенства $P = \tau\omega$, аналогичного равенству $P = Fv$, объясняется тем, что спин (излучаемый вращающимся диполем вдоль оси вращения) не связан с движением. Поэтому для создания спинового момента импульса не требуется затрата энергии.

Список литературы

1. Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц, *Теория поля* (М.: Наука, 1973)
2. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, (John Wiley, 1999).
3. ХрапкоР.И., «Незамеченное излучение вращающегося диполя**».** Направлено в *Письма в ЖЭТФ, УФН* 04.03.2018 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=173&module=files