

## Неподвижный импульс и момент импульса поля вращающегося диполя

Р. И. Храпко<sup>1</sup>

*Московский авиационный институт, Москва, 125993*

Обращается внимание, что для существования импульса, потока массы и потока импульса субстанции, вообще говоря, не нужны скорость и масса. При этом для потока импульса по кривой траектории нужна центростремительная сила даже при отсутствии скорости и массы. В отношении электромагнитного поля вращающегося диполя, показано, что известный поток момента импульса имеет орбитальный характер и не является излучением, он не связан с энергией. Независимо от этого потока существует излучение спина, не замеченное современной электродинамикой.

**Ключевые слова:** классический спин; тензор напряжений; электродинамика

**PACS:** 75.10.Hk; 41.20.Jb

### Содержание

1. Введение
  2. Тензор энергии-импульса упругой субстанции
  3. Тензор энергии-импульса статического электромагнитного поля
  4. Электромагнитное поле вращающегося диполя
  5. Тензор энергии-импульса поля вращающегося диполя
  6. Современное представление о потоке момента импульса в поле вращающегося диполя
  7. Неудачная попытка интерпретировать орбитальный момент импульса как спин
  8. Излучение спина вращающимся диполем
  9. Заключение
- Список литературы

### 1. Введение

В этом обзоре обсуждается наличие двух потоков момента импульса в электромагнитном поле вращающегося диполя: 1) излучение спина преимущественно в направлении оси вращения и 2) безизлучательный поток орбитального момента импульса, испускаемый преимущественно в окрестности плоскости вращения.

Как известно, вращающийся электрический диполь излучает энергию в виде электромагнитной волны круговой или эллиптической поляризации, направленной преимущественно вдоль оси вращения (Рис. 1,3) [1-3]. А, согласно идее, возникшей в конце позапрошлого века, такая волна содержит поток момента импульса, *плотность* которого пропорциональна плотности потока энергии, то есть вектору Пойнтинга [4-6]. Зоммефельд [7, с. 560] пишет:

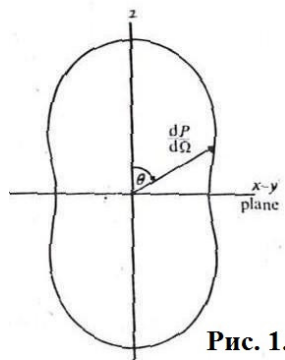
«Свет поляризован по кругу, когда момент количества движения достигает своей максимальной величины, возможной для фиксированного значения *интенсивности* света».

---

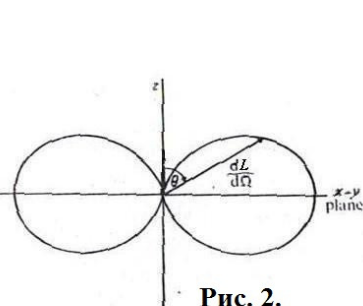
<sup>1</sup> Email: [khrapko\\_ri@hotmail.com](mailto:khrapko_ri@hotmail.com), [khrapko\\_ri@mai.ru](mailto:khrapko_ri@mai.ru), <http://khrapkori.wmsite.ru>

Из этого следует, что в поле вращающегося диполя содержится поток момента импульса направленный преимущественно вдоль оси вращения (Рис. 4, см. подробнее в Разделе 8).

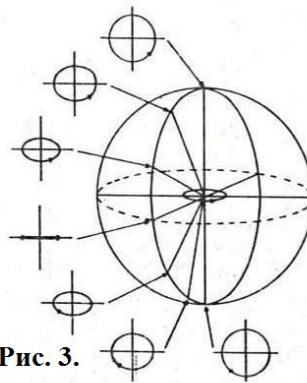
Однако, согласно современной электродинамике, поле вращающегося диполя содержит поток момента импульса, направленный преимущественно в окрестности плоскости вращения диполя с диаграммой направленности  $\sin^2 \theta$  (Рис. 2) [8-13]. Причем максимум этой диаграммы направленности приходится на направления, вдоль которых излучение линейно поляризовано. Значит, природа этого потока не имеет отношения к идее классиков, касающейся излучения круговой поляризации.



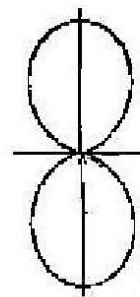
**Рис. 1.**  
Угловое распределение  
потока энергии  
 $dP/d\Omega \propto (\cos^2 \theta + 1)$



**Рис. 2.**  
Угловое распределение  
z-компоненты потока  
момента импульса  
 $dL_z/dt d\Omega \propto \sin^2 \theta$



**Рис. 3.**  
Поляризация электрического поля  
вращающегося диполя при наблюдении  
с различных направлений



**Рис. 4.**  
Угловое распределение  
z-компоненты потока  
спина  
 $dS_z/dt d\Omega \propto \cos^2 \theta$

Зоммерфельд [7, с. 558] объясняет природу потока, существующего в окрестности плоскости вращения, следующим образом:

«Направления импульса и излучения являются радиальными только асимптотически и это не строго выполняется при конечном радиусе  $r$ . Поэтому при конечном  $r$  величина момента импульса  $\mathbf{M}$  отлична от нуля. Хотя при возрастании  $r$  величина  $\mathbf{M}$  уменьшается и стремится к нулю, но одновременно возрастает область интегрирования (она возрастает как квадрат радиуса сферы). Отсюда можно понять, что эти два эффекта могут взаимно компенсировать друг друга, в результате чего и на бесконечном удалении от центра, так же как и на конечном, величина интегрального момента импульса конечна и отлична от нуля».

Мы объясняем в этой статье, что первый поток момента импульса, открытый Садовским и Пойнтингом и связанный с круговой поляризацией, является излучением спина. Его диаграмма направленности,  $\cos^2 \theta$ , представлена на Рис. 4. Второй поток представляет собой безизлучательное распространение орбитального момента импульса.

В разделе 2 обсуждается разница между силой, когда она является простым потоком импульса, и *эмитированным* потоком импульса:

- 1) Давление на  $x, y$ -плоскость, то есть плотность потока импульса, описывается компонентой  $T_{\wedge}^{zz}$  [Н/м<sup>2</sup>] тензора энергии-импульса. Такая плотность содержится, например, в руке, когда мы давим пальцем на плоскость, поглощающую этот поток импульса. Подобный поток импульса, описываемый единственной компонентой  $T_{\wedge}^{zz}$ , не связан ни со скоростью, ни с потоком энергии. Поэтому плоскость должна быть неподвижной для того, чтобы не совершалась работа под действием силы. Подобный поток импульса можно назвать *безизлучательным* потоком.
- 2) Эта же компонента  $T_{\wedge}^{zz}$  характеризует поток импульса, который мы называем *эмитированным*, если она сопровождается компонентой  $T_{\wedge}^{tz}$  [кг/м<sup>2</sup>сек], свидетельствующей о наличии потока массы-энергии. Пара компонент  $T_{\wedge}^{tz}, T_{\wedge}^{zz}$  содержится, например, в струе брандспойта, причем  $T_{\wedge}^{tz} = T_{\wedge}^{zz} / v$ , где  $v$  есть скорость струи. Когда струя поглощается (полностью растекается по плоскости), плоскость может двигаться в сторону оси  $z$  с произвольной скоростью, и от этого не изменится состояние струи, а сила, действующая на

плоскость, уменьшится из-за того, что некоторая часть импульса струи будет заполнять пространство, освобождаемое отодвигающейся плоскостью. Этот процесс детально изучен в отношении электромагнитной волны в работах. [14,15].

В разделе 3 безизлучательное распространение импульса и, соответственно, момента импульса обнаруживается в статическом электромагнитном поле, а в разделе 5 оно обнаруживается в поле вращающегося диполя. В разделах 6 и 7 критикуется современное представление о потоке момента импульса в поле вращающегося диполя как об излучении спина. А в разделе 8 подсчитывается действительное излучение спина вращающимся диполем.

## 2. Тензор энергии-импульса упругой субстанции

Рассмотрим сначала некую субстанцию, которая, возможно, вращается и имеет механические напряжения. Используются цилиндрические координаты пространства Минковского с выражением для интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2, \quad g_{tt} = c^2 \text{ [м}^2/\text{сек}^2], \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \text{ [м}^2/\text{р}^2], \quad \sqrt{-g_{\varphi\varphi}} = cr \text{ [м}^2/\text{сек}*\text{р}], \quad \sqrt{-g_{3\lambda}} = r \text{ [м/р]}. \quad (2.1)$$

При указании размерности, пишется "р" в качестве обозначения радиана. Для написания тензорных плотностей не используется готический шрифт, как это обычно делается, см., например [1, § 96]. Вместо этого плотности отмечаются знаком 'wedge'  $\wedge$ . Такое обозначение использовал И.А. Кунин [16] при переводе на русский язык монографии [17]. Однако в отличие от [16], знак  $\wedge$  ставится на уровне нижних или верхних индексов для плотностей веса +1 или -1 соответственно. В частности, корень из определителя метрического тезора  $\sqrt{-g_{\varphi\varphi}}$  и корень из определителя трехмерного метрического тезора  $\sqrt{-g_{3\lambda}}$  записываются с индексом  $\wedge$ , поскольку являются скалярной плотностью веса +1.

Угловая компонента плотности потока массы субстанции (аналог вектора Пойнтинга) дается компонентой тензорной плотности энергии-импульса субстанции  $T_{\varphi}^{t\varphi}$  [кг/м<sup>2</sup>\*сек] (далее мы будем писать просто о тензоре энергии-импульса). Это означает, что через площадку  $da_{\varphi}^{\wedge} = (drdz)^{\wedge}$  за время  $dt$  проходит масса  $dP^t = T_{\varphi}^{t\varphi} da_{\varphi}^{\wedge} dt$  [кг].

Компонента  $T_{\varphi}^{t\varphi}$ , равная компоненте  $T_{\varphi}^{t\varphi}$  в силу симметрии тензора энергии-импульса, дает объемную плотность импульса. Импульс, находящийся в объеме  $dV_t^{\wedge} = (drd\varphi dz)^{\wedge}$ , равен  $dP^{\varphi} = T_{\varphi}^{t\varphi} dV_t^{\wedge}$  [кг\*р/сек].

При определении *физических* компонент плотностей надо использовать корень из определителя трехмерного метрического тезора  $\sqrt{-g_{3\lambda}} = r$ :

$$da_{\varphi}^{\wedge} = da_{\varphi}^{\wedge} \sqrt{-g_{3\lambda}} \sqrt{-g^{\varphi\varphi}} = drdz, \quad dV_t^{\wedge} = dV_t^{\wedge} \sqrt{-g_{3\lambda}} = drrd\varphi dz. \quad T^{t\varphi} = T_{\varphi}^{t\varphi} \sqrt{-g_{\varphi\varphi}} / \sqrt{-g_{3\lambda}} \text{ [кг/м}^2*\text{сек}], \quad dP^{\varphi} = dP^{\varphi} \sqrt{-g_{\varphi\varphi}} \text{ [кг*м/сек]}, \quad (2.2)$$

Плотность потока импульса, то есть давление вдоль угловой координаты или вдоль радиуса дается компонентами  $T_{\varphi}^{\varphi\varphi}$  [кг\*р/м<sup>2</sup>\*сек<sup>2</sup>] или  $T_{\varphi}^{rr}$  [кг/сек<sup>2</sup>\*р], соответственно. Кроме того, наша субстанция может иметь напряжение сдвига. Оно описывается компонентой  $T_{\varphi}^{\varphi r}$  [кг/м\*сек<sup>2</sup>]. Это означает, что на площадку  $dS_r^{\wedge} = (d\varphi dz)^{\wedge}$ , перпендикулярную радиусу, действует касательная сила  $d\mathcal{F}^{\varphi} = T_{\varphi}^{\varphi r} dS_r^{\wedge}$

В силу условия равновесия субстанции  $\nabla_{\beta} T_{\varphi}^{\alpha\beta} = 0$ , центростремительную силу требует только *плотность потока импульса* вдоль угловой координаты  $T_{\varphi}^{\varphi\varphi}$ , но не поток массы и не импульс, описываемые равными компонентами  $T_{\varphi}^{t\varphi}$  и  $T_{\varphi}^{t\varphi}$ .

Действительно, использование символов Кристоффеля в уравнении  $\nabla_{\beta} T_{\wedge}^{\alpha\beta} = 0$ ,

$$\nabla_{\beta} T_{\wedge}^{\alpha\beta} \equiv \partial_{\beta} T_{\wedge}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} T_{\wedge}^{\gamma\beta} = 0, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r, \quad \Gamma_{\varphi r}^{\varphi} = 1/r, \quad (2.3)$$

дает

$$\partial_r T_{\wedge}^{rr} - r T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = 0, \quad (2.4)$$

$$\partial_r T_{\wedge}^{\varphi r} + 2T_{\wedge}^{\varphi r} / r = 0. \quad (2.5)$$

Центростремительная сила обеспечивается градиентом радиального давления  $\partial_r T_{\wedge}^{rr}$  (2.4).

Компоненты  $T_{\wedge}^{\varphi r}$  и  $T_{\wedge}^{r\varphi}$  могут быть произвольными функциями радиальной координаты и существовать сами по себе. При условии осевой симметрии, они не входят в условие равновесия  $\nabla_{\beta} T_{\wedge}^{\alpha\beta} = 0$ .

Напряжения сдвига  $T_{\wedge}^{\varphi r}$  подчиняются внутреннему уравнению (2.5) и также не зависят от остальных компонентов тензора энергии-импульса. Плотность массы может быть вообще равна нулю,  $T_{\wedge}^r = 0$ .

Таким образом, можно говорить о трех не зависящих друг от друга, не интерферирующих между собой частях субстанции. Они описываются тремя разными тензорами энергии-импульса, которые, конечно, можно суперпозировать.

		$T_{\wedge}^{t\varphi}$
$T_{\wedge}^{\varphi t}$		

Рис. 5

	$T_{\wedge}^{rr}$	
		$T_{\wedge}^{\varphi\varphi}$

Рис. 6

		$T_{\wedge}^{r\varphi}$
	$T_{\wedge}^{\varphi r}$	

Рис. 7

Тензор энергии-импульса **рисунка 5** означает, что субстанция содержит поток массы (вектор Пойнтинга) и импульс, направленные вдоль угловой координаты. Однако этот поток массы не требует центростремительной силы. Это свидетельствует об отсутствии *скорости* движения. Поток массы и импульс – статичны. Тем не менее, субстанция содержит объемную плотность импульса  $T_{\wedge}^{\varphi t}$  и объемную плотность момента импульса

$$L_{\wedge}^{r\varphi t} = r T_{\wedge}^{\varphi t}. \quad (2.6)$$

При желании, эту ситуацию можно представить так: половина массы отрицательна и крутится в одну сторону, а другая половина массы положительна и крутится в другую сторону. В результате массы сокращаются, сокращаются также силы, возникающие из-за центростремительного ускорения, поскольку они направлены в разные стороны из-за разного знака масс.

Тензор энергии-импульса **рисунка 6** означает, что субстанция содержит плотность потока импульса вдоль угловой координаты  $T_{\wedge}^{\varphi\varphi}$ . Центростремительная сила, поддерживающая такой поток импульса, обеспечивается выполнением уравнения (2.4). Однако наличие центростремительной силы не означает *вращения* субстанции и наличия импульса и момента импульса. Плотность потока импульса, то есть давление, может возникать без движения (как и сам импульс). Самый простой пример: отрицательное угловое давление содержит резинка, натянутая на цилиндр; такое давление требует радиальной силы со стороны цилиндра.

При вращении субстанции, тензоры энергии-импульса рисунков 5 и 6 суперпозировуются. При этом угловая скорость определяется из равенства  $T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \omega T_{\wedge}^{t\varphi}$ . Однако выполнение этого равенства не гарантирует вращение. Состояния субстанции, описываемые тензорами  $T_{\wedge}^{\varphi\varphi}$  и  $T_{\wedge}^{rr}$ , с одной стороны, и тензорами  $T_{\wedge}^{t\varphi} = T_{\wedge}^{\varphi t}$ , с другой, могут быть независимыми. Применение равенства  $T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \omega T_{\wedge}^{t\varphi}$  к тензору рисунка 5, где  $T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = 0$ , подтверждает  $\omega = 0$ .

Тензор энергии-импульса **рисунка 7** тоже не означает движение субстанции. Механическое напряжение, описываемое таким тензором энергии-импульса, возникает, если, например, вращающий момент силы  $\tau_z$  прикладывается к неподвижной жесткой субстанции где-то в окрестности оси. Тогда субстанция передает этот момент силы на бесконечность или на свою границу с помощью напряжения сдвига, которое является решением уравнения (2.5):

$$T_{\wedge}^{\varphi r} = T^{\hat{\varphi} r} = \text{Const} / r^2 \text{ [Н/м}^2\text{]}. \quad d\tau_z = dz \int r T^{\hat{\varphi} r} r d\varphi = \text{Const} \text{ [Н*м]} \quad (2.7)$$

Момент силы  $d\tau_z$  (2.7), действующий на протяжении отрезка  $dz$  оси, является потоком момента импульса. Естественно, этот радиальный поток момента импульса нельзя рассматривать как излучение момента импульса.

### 3. Тензор энергии-импульса статического электромагнитного поля

Теперь в качестве субстанции выберем статическое электромагнитное поле. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля даётся формулой

$$T_{\wedge}^{\mu\nu} = -g^{\mu\lambda} F_{\lambda\alpha} F_{\wedge}^{\nu\alpha} + g^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F_{\wedge}^{\alpha\beta} / 4 \quad (3.1)$$

(мы полагаем, что лагранжиан электромагнитного поля равен  $\mathcal{L} = F_{\alpha\beta} F_{\wedge}^{\alpha\beta} / 4$ ). Здесь используются четырехмерные обозначения электромагнитных полей в виде тензора электромагнитного поля [1,2]:

$$F_{\alpha\beta} = \partial_{\alpha} A_{\beta} - \partial_{\beta} A_{\alpha}, \quad F_{\wedge}^{\mu\nu} = F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sqrt{g_{\wedge}} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0}, \quad \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 377 \text{ [Ом]}. \quad (3.2)$$

Связь между дифференциальной формой  $F_{\alpha\beta}$  и бивекторной плотностью  $F_{\wedge}^{\mu\nu}$  записана соотношением (3.2) в форме *сопряжения*, использованного в [18].

Рассмотрим однородное магнитное поле, направленное вдоль оси  $z$ , в цилиндрических координатах. Поскольку, в соответствии с [1 (23.5)], для физической компоненты  $F^{\hat{\varphi} r}$  справедливо равенство  $F^{\hat{\varphi} r} = H_z$ , а компонента  $F_{\wedge}^{\varphi r}$  равна физической компоненте,  $F_{\wedge}^{\varphi r} = F^{\hat{\varphi} r} \sqrt{-g_{3\wedge}} / \sqrt{-g_{\varphi\varphi}} = F^{\hat{\varphi} r}$ , то полагаем, что  $F_{\wedge}^{\varphi r} = H$  [А/м], и, в силу (3.2), имеем:

$$F_{\varphi r} = F_{\wedge}^{\varphi r} g_{\varphi\varphi} g_{rr} \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} / \sqrt{g_{\wedge}} = \mu_0 r H \text{ [В*сек/м]} \quad (3.3)$$

Вычисление ненулевых компонент тензора энергии-импульса по формуле (3.1) дает:

$$T_{\wedge}^{tt} = \mu_0 r H^2 / 2c^2, \quad T^{tt} = T_{\wedge}^{tt} / \sqrt{-g_{3\wedge}} = \mu_0 H^2 / 2c^2 \text{ [кг/м}^3\text{]}, \quad (3.4)$$

$$T_{\wedge}^{rr} = \mu_0 r H^2 / 2, \quad T^{rr} = T_{\wedge}^{rr} / \sqrt{-g_{3\wedge}} = \mu_0 H^2 / 2 \text{ [Н/м}^2\text{]}, \quad (3.5)$$

$$T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \mu_0 H^2 / 2r, \quad T^{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = T_{\wedge}^{\varphi\varphi} g_{\varphi\varphi} / \sqrt{-g_{3\wedge}} = \mu_0 H^2 / 2 \text{ [Н/м}^2\text{]} \quad (3.6)$$

(компоненты  $T_{\wedge}^{z\nu}$  игнорируются).

$T_{\wedge}^{tt} = \mu_0 r H^2 / 2c^2$		
	$T_{\wedge}^{rr} = \mu_0 r H^2 / 2$	
		$T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \mu_0 H^2 / 2r$

**Рис. 8.** Однородное магнитное поле, направленное вдоль оси  $z$

Рассмотрим электрическое поле  $E = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r$  заряженной оси, которая имеет плотность заряда  $\lambda$  [Кл/м]. Согласно [1 (23.5)],  $F_r = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r$ . Поэтому последовательно получаем, согласно (3.2) и (3.1),

$$F^{rt} = \lambda / 2\pi, \quad T_{\wedge}^{tt} = \lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r c^2, \quad T_{\wedge}^{rr} = -\lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r, \quad T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r^3. \quad (3.7)$$

$T_{\wedge}^{tt} = \lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r c^2$		
	$T_{\wedge}^{rr} = -\lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r$	
		$T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r^3$

**Рис. 9.** Электрическое поле заряженной оси z.

Естественно, соотношение  $\partial_r T_{\wedge}^{rr} = r T_{\wedge}^{\varphi\varphi}$  (2.4) выполняется как для магнитного, так и для электрического поля. Это означает, что угловые потоки импульсов в точности обеспечены центостремительной силой за счет градиентов радиального давления. Однако никакое движение не наблюдается.

Такое обеспечение потоков центостремительной силой сохраняется неизменным при наложении этих магнитного и электрического полей друг на друга, когда диагональные члены тензора энергии-импульса просто складываются.

$T_{\wedge}^{tt} = \mu_0 r H^2 / 2c^2 + \lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r c^2$		$T_{\wedge}^{r\varphi} = H\lambda / 2\pi \epsilon_0 r c^2$
	$T_{\wedge}^{rr} = \mu_0 r H^2 / 2 - \lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r$	
$T_{\wedge}^{\varphi t} = H\lambda / 2\pi^2 \epsilon_0 c^2$		$T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \mu_0 H^2 / 2r + \lambda^2 / 8\pi^2 \epsilon_0 r^3$

**Рис. 10.** Скрещенные магнитное и электрическое поля

Однако при этом появляется вектор Пойнтинга и, соответственно, плотность импульса, направленные вдоль угловой координаты,

$$T_{\wedge}^{r\varphi} = T_{\wedge}^{\varphi t} = H\lambda / 2\pi \epsilon_0 r c^2, \quad (3.8)$$

а никакой дополнительной центостремительной силы не появляется. Значит, плотность потока массы-энергии (3.8) не имеет скорости. Этот поток массы и импульс – статичны, как в субстанции, описываемой тензором энергии-импульса рисунка 5.

Естественно, этот импульс имеет момент импульса, плотность которого равна

$$L_{\wedge}^{r\varphi t} = r T_{\wedge}^{\varphi t} = H\lambda / 2\pi \epsilon_0 c^2. \quad (3.9)$$

При желании, плотность момента импульса можно проинтегрировать, если поля созданы внутри цилиндрического конденсатора:

$$L^{r\varphi} = \int r T_{\wedge}^{\varphi t} dV_{\wedge} = \int (H\lambda / 2\pi \epsilon_0 c^2) r dr d\varphi dz. \quad (3.10)$$

Существование этого (статического) момента импульса допускает экспериментальную проверку [19,20].

#### 4. Электромагнитное поле вращающегося диполя

При описании поля вращающегося электрического диполя используются *сферические* координаты в пространстве Минковского с выражением для интервала

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad \sqrt{-g_{\wedge}} = cr^2 \sin \theta \text{ [м}^3/\text{сек} \cdot \text{п}^2]$$

$$g_{tt} = c^2 \text{ [м}^2/\text{сек}^2], \quad g_{\theta\theta} = -r^2 \text{ [м}^2/\text{п}^2], \quad g_{\varphi\varphi} = -r^2 \sin^2 \theta \text{ [м}^2/\text{п}^2], \quad \sqrt{-g_{3\wedge}} = r^2 \sin \theta \text{ [м}^2/\text{п}^2] \quad (4.1)$$

и четырехмерные обозначения электромагнитных полей в виде тензора электромагнитного поля [1,2]:

$$F_{\alpha\beta}, F_{\wedge}^{\mu\nu} = F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sqrt{-g_{\wedge}} \sqrt{\epsilon_0 / \mu_0} = F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} r^2 \sin \theta / \mu_0. \quad (4.2)$$

$$F_{it} = E_i, \quad F_{\wedge}^{tk} = -D^k = F_{it} \epsilon_0 g^{ki} r^2 \sin \theta, \quad (4.3)$$

$$F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B^k, \quad F_{\wedge}^{lm} = -\epsilon^{lmi} H_i = F_{ij} g^{li} g^{mj} r^2 \sin \theta / \mu_0. \quad (4.4)$$

Поле диполя  $d$  [Кл\*м], вращающегося с угловой скоростью  $\omega$ , хорошо известно [11-13]:

$$F_{tr} = (2/r^3 - i2\omega/r^2 c) \sin \theta \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)] d / 4\pi \epsilon_0 = E_r \text{ [В/м]}, \quad (4.5)$$

$$F_{t\theta} = (-1/r^2 + i\omega/rc + \omega^2/c^2) \cos \theta \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi\epsilon_0, \quad (4.6)$$

$$F_{t\varphi} = (-i/r^2 - \omega/rc + i\omega^2/c^2) \sin \theta \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi\epsilon_0 \quad (4.7)$$

$$F_{r\theta} = (-i\omega/rc^2 - \omega^2/c^3) \cos \theta \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi\epsilon_0, \quad (4.8)$$

$$F_{\varphi r} = (-\omega/rc^2 + i\omega^2/c^3) \sin \theta \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi\epsilon_0, \quad B_{\theta\varphi} = 0. \quad (4.9)$$

$$F_{\wedge}^{tr} = (-2/r + i2\omega/c) \sin^2 \theta \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi, \quad (4.10)$$

$$F_{\wedge}^{t\theta} = (1/r^2 - i\omega/rc - \omega^2/c^2) \sin \theta \cos \theta \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi \quad (4.11)$$

$$F_{\wedge}^{t\varphi} = (i/r^2 + \omega/rc - i\omega^2/c^2) \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi \quad (4.12)$$

$$F_{\wedge}^{r\theta} = (-i\omega/r - \omega^2/c) \sin \theta \cos \theta \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi \quad (4.13)$$

$$F_{\wedge}^{\varphi r} = (-\omega/r + i\omega^2/c) \exp[i\varphi + i\omega(r/c - t)]d/4\pi, \quad B_{\wedge}^{\theta\varphi} = 0 \quad (4.14)$$

## 5. Тензор энергии-импульса поля вращающегося диполя

Подстановка тензоров  $F_{\alpha\beta}$ ,  $F_{\wedge}^{\mu\nu}$  в (4.1) даёт компоненты тензора энергии-импульса.

$T_{\wedge}^{tt} = \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0}$	$\frac{2\sin\theta + 3\sin^3\theta}{4r^4c^2}$	$+\frac{\omega^2\sin^3\theta}{r^2c^4}$	$+\frac{\omega^4(\cos^2\theta + 1)\sin\theta}{2c^6}$	(5.1)
$T_{\wedge}^{rr} = \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0}$	$\frac{2\sin\theta - 5\sin^3\theta}{4r^4}$	$-\frac{\omega^2\sin^3\theta}{r^2c^2}$	$+\frac{\omega^4(\cos^2\theta + 1)\sin\theta}{2c^4}$	(5.2)
$T_{\wedge}^{tr} = \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0}$			$+\frac{\omega^4(\cos^2\theta + 1)\sin\theta}{2c^5}$	(5.3)
$T_{\wedge}^{\varphi r} = \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0}$	$\frac{\omega\sin\theta}{r^4c^2}$	$+\frac{\omega^3\sin\theta}{r^2c^4}$		(5.4)
$T_{\wedge}^{\varphi r} = \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0}$		$\frac{\omega^3\sin\theta}{r^2c^3}$		(5.5)
$T_{\wedge}^{\theta\theta} = \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0}$	$\frac{5\sin^3\theta}{4r^6}$	$+\frac{\omega^2\sin^3\theta}{2r^4c^2}$		(5.6)
$T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0}$	$\frac{3\sin\theta}{4r^6}$	$+\frac{3\omega^2\sin\theta}{2r^4c^2}$		(5.7)
$T_{\wedge}^{\theta r} = \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0}$	$\frac{\cos\theta\sin^2\theta}{r^5}$			(5.8)

Рис. 11. Тензор энергии-импульса поля вращающегося диполя

На рисунке 11 компоненты тензора энергии-импульса распределены по трем столбцам, соответствующим ближней зоне, промежуточной и волновой зоне.

Плотность потока энергии существует только в волновой зоне и имеет известную диаграмму направленности  $\cos^2\theta + 1$  (Рис. 1):

$$T^{tr} = T_{\wedge}^{tr} / \sqrt{-g_{3\wedge}} = \frac{\omega^4(\cos^2\theta + 1)}{2c^5r^2} \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0} \text{ [кг/сек}\cdot\text{м}^2\text{]}. \quad (5.9)$$

Интегрирование дает мощность излучения

$$P = \int T^{tr} r^2 d\Omega = \int_0^\pi \frac{\omega^4(\cos^2\theta + 1)}{2c^5} \frac{d^2}{16\pi^2\epsilon_0} 2\pi \sin\theta d\theta = \frac{\omega^4 d^2}{6\pi\epsilon_0 c^5} \text{ [кг/сек]} \quad (5.10)$$

где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ . Это излучение энергии сопровождается излучением импульса. Плотность потока излучаемого импульса, то есть давление излучения, равно

$$T^{rr} = T_{\wedge}^{rr} / \sqrt{-g_{3\wedge}} = \frac{\omega^4 (\cos^2 \theta + 1)}{2c^4 r^2} \frac{d^2}{16\pi^2 \epsilon_0} \text{ [Н/м}^2\text{]}. \quad (5.11)$$

Больше никакого *излучения* вращающийся диполь не производит в рамках электродинамики Максвелла. Радиальный поток момента импульса на бесконечность создается механическими напряжениями сдвига  $T_{\wedge}^{\varphi r}$  (5.5), которые существуют в электромагнитном поле вращающегося диполя. Этот поток момента импульса нельзя признать излучением. Он не сопровождается потоком энергии. Он имеет совсем другую диаграмму направленности, чем поток энергии (5.9). Этот поток момента импульса аналогичен потоку, который передается на бесконечность неподвижной твердой субстанцией, согласно формуле (2.6). При использовании сферических координат, компонента этого момента силы относительно оси  $z$ , действующая на площадку  $(d\theta d\varphi)^\wedge$ , равна

$$d\tau^{r\varphi} = r \sin \theta T_{\wedge}^{\varphi r} dV_r^\wedge / dt = \frac{\omega^3 \sin^2 \theta}{rc^3} \frac{d^2}{16\pi^2 \epsilon_0} d\theta d\varphi. \quad (5.12)$$

Физическая компонента определяет диаграмму направленности этого потока,  $d\tau \propto \sin^2 \theta d\Omega$ :

$$d\tau^{r\varphi} = d\tau^{r\varphi} \sqrt{-g_{\varphi\varphi}} = \frac{\omega^3 \sin^3 \theta}{c^3} \frac{d^2}{16\pi^2 \epsilon_0} d\theta d\varphi = \frac{\omega^3 \sin^2 \theta}{c^3} \frac{d^2}{16\pi^2 \epsilon_0} d\Omega, \quad (5.13)$$

Интегрирование физической компоненты дает величину потока момента импульса относительно оси  $z$ :

$$\tau_z = \tau^{r\varphi} = \frac{\omega^3 d^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \text{ [Н м]}. \quad (5.14)$$

Повторим, этот поток нельзя признать излучением так же как и момент силы, который мы прикладываем, например, закручивая шуруп. Результат (5.14), полученный этим способом, дан в [1, § 72, Задача 2]. Диаграмма направленности (5.13) представлена в [11-13].

В то же время поле вращающегося диполя содержит объемную плотность импульса и плотность потока массы, направленные вдоль угловой координаты. Эти величины описываются равными друг другу компонентами  $T_{\wedge}^{\varphi r}$  и  $T_{\wedge}^{r\varphi}$  (5.4), содержащими по два слагаемых. Они не требуют центростремительной силы, потому что они статичны, то есть не имеют скорости, аналогично вектору Пойнтинга в скрещенных магнитном и электрических полях (3.8), силовые линии которого замкнуты, или аналогично плотности потока массы в субстанции рисунка 5.

Эти компоненты ответственны за (статический) момент импульса относительно оси  $z$ , присутствующий в поле. Физическая компонента этого момента импульса в объеме  $(drd\theta d\varphi)^\wedge$ , при игнорировании первого слагаемого из (5.4), равна

$$dL^{r\varphi} = r \sin \theta T_{\wedge}^{\varphi r} (drd\theta d\varphi)^\wedge \sqrt{-g_{\varphi\varphi}} = \frac{\omega^3 \sin^3 \theta}{c^4} \frac{d^2}{16\pi^2 \epsilon_0} drd\theta d\varphi. \quad (5.15)$$

Интегрирование дает величину момента импульса внутри шарового слоя

$$dL_z = \int \frac{\omega^3 \sin^3 \theta}{c^4} \frac{d^2}{16\pi^2 \epsilon_0} d\theta d\varphi dr = \frac{\omega^3 d^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^4} dr. \quad (5.16)$$

Она оказывается не зависящей от радиуса слоя (поскольку речь идет о втором слагаемом).

Естественно, что условие равновесия,  $\nabla_{\beta} T_{\wedge}^{\alpha\beta} \equiv \partial_{\beta} T_{\wedge}^{\alpha\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} T_{\wedge}^{\gamma\beta} = 0$ , удовлетворяется слагаемыми тензора энергии-импульса для каждой из трех зон, по отдельности. Действительно, учитывая значения символов Кристоффеля

$$\Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r \sin^2 \theta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} = 1/r, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^{\varphi} = \text{ctg} \theta, \quad (5.17)$$



имеем, например, для промежуточной зоны

$$\nabla_{\beta} T_{\wedge}^{r\beta} \equiv \partial_r T_{\wedge}^{rr} + \Gamma_{\theta\theta}^r T_{\wedge}^{\theta\theta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \frac{2\omega^2 \sin^3 \theta}{r^3 c^2} - r \frac{\omega^2 \sin^3 \theta}{2r^4 c^2} - r \sin^2 \theta \frac{3\omega^2 \sin \theta}{2r^4 c^2} = 0, \quad (5.18)$$

$$\nabla_{\beta} T_{\wedge}^{\theta\beta} \equiv \partial_{\theta} T_{\wedge}^{\theta\theta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^{\theta} T_{\wedge}^{\varphi\varphi} = \frac{3\omega^2 \sin^2 \theta \cos \theta}{2r^4 c^2} - \sin \theta \cos \theta \frac{3\omega^2 \sin \theta}{2r^4 c^2} = 0, \quad (5.19)$$

$$\nabla_{\beta} T_{\wedge}^{\varphi\beta} \equiv \partial_r T_{\wedge}^{\varphi r} + 2\Gamma_{\varphi r}^{\varphi} T_{\wedge}^{\varphi r} = -2 \frac{\omega^3 \sin \theta}{r^3 c^3} + 2 \frac{1}{r} \frac{\omega^3 \sin \theta}{r^2 c^3} = 0. \quad (5.20)$$

Уравнения (5.18) и (5.19) содержат центробежную силу, уравновешивающую статические напряжения  $T_{\wedge}^{\theta\theta}$ ,  $T_{\wedge}^{\varphi\varphi}$ . Эта сила создается градиентом радиального давления  $\partial_r T_{\wedge}^{rr}$ , и градиентом углового давления  $\partial_{\theta} T_{\wedge}^{\theta\theta}$ . Уравнения (5.18) и (5.19) аналогичны уравнению (2.4).

## 6. Современное представление о потоке момента импульса в поле вращающегося диполя

Современная электродинамика признает величину (5.14)

$$\tau_z = \frac{\omega^3 d^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \text{ [Н м]} \quad (6.1)$$

с угловым распределением (5.13)

$$d\tau_z = \frac{\omega^3 \sin^2 \theta}{c^3} \frac{d^2}{16\pi^2 \epsilon_0} d\Omega. \quad (6.2)$$

в качестве радиального потока момента импульса в поле вращающегося диполя. Однако этот поток связывается не с напряжениями сдвига  $T_{\wedge}^{\varphi r}$  (5.5), а с объемной плотностью импульса  $T_{\wedge}^{\varphi r}$  (5.4), причем принимается во внимание только второе слагаемое из (5.4). Считается, что момент этого (статического) импульса,  $L_z$ , несется наружу вдоль радиуса со скоростью света. Умножая объемную плотность момента импульса  $L_{\wedge}^{r\varphi r} = r \sin \theta T_{\wedge}^{\varphi r}$  на скорость  $c = dr/dt$  и затем на площадь поверхности, получают поток момента импульса, то есть момент силы. Это выглядит как подстановка  $dr/dt = c$  в формулах (5.15), (5.16)

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{\omega^3 d^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^4} \frac{dr}{dt} = \frac{\omega^3 d^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3}. \quad (6.3)$$

*Corney A., Atomic and Laser Spectroscopy (Oxford University Press, 1977).*

To calculate the rate at which angular momentum is radiated by an electric dipole source we consider the oscillating current distribution to be surrounded by a large, perfectly absorbing sphere.

Associated with the time-averaged flux,  $N$ , in the direction  $k$  is an energy density  $U$  given by  $Uk = N/c$  (здесь  $k$  – единичный волновой вектор). There is also an associated momentum density  $G = N/c$ . Thus the torque exerted on an element of area  $dS$  of the absorbing sphere is  $c dS (r \wedge N/c^2)$  and the angular momentum radiated per unit time is given by

$$\underline{L} = \frac{1}{c} \int (\underline{r} \wedge \underline{N}) dS. \quad (2.75)$$

Аналогично Корнею [21], рассуждает Гайтлер [22]. Он тоже полагает, что имеющиеся в наличии энергия и момент импульса создают поток энергии и момента импульса вдоль радиуса. При этом Гайтлер не обращает внимание на то, что у потоков энергии и момента импульса совершенно различное пространственное распределение, а потому, в

действительности, предполагаемый поток момента импульса не связан с потоком энергии. Рассматривая мультипольное излучение, характеризующееся числами  $l$  и  $m$ , Гайтлер пишет:

We see again, that  $U$  and  $M_z$  are in a fixed relationship. If  $U$  is composed of contributions from photons  $n\hbar\omega$ ,  $M_z = nm\hbar$ , which shows that each photon has an angular momentum  $m\hbar$ , as would be the case for an electron (without spin).

Отметим здесь, что это высказывание Гайтлера за одно указывает на орбитальный, а не спиновый характер момента импульса этих квантов энергии, поскольку для спина может быть только  $m = 1$ . Далее Гайтлер пишет

It is interesting to note that the angular momentum is not contained in the pure wave zone, where the field strengths are perpendicular to  $\mathbf{r}$  and behave like  $1/r$ . In this zone, indeed,  $M_z$  vanishes:  $M_z$  is proportional to  $E_r$  and  $E_r \sim 1/r^2$ . The contributions to  $M_z$  arise from a subtle interference effect [p. 404].

А это высказывание подтверждает, что эти кванты не являются излучением.

Идея получать плотность потока  $T_{\wedge}^{\omega r}$  умножением соответствующей объемной плотности  $T_{\wedge}^{\omega}$  на скорость света представляется нам некорректной. Плотности потоков выражаются специфическими компонентами тензора энергии-импульса.

$T_{\wedge}^{rr}$  - плотность потока массы ( $T_{\wedge}^{rr} \neq T_{\wedge}^{rr} c$ );

$T_{\wedge}^{rr}$  - плотность потока  $r$ -компоненты импульса ( $T_{\wedge}^{rr} \neq T_{\wedge}^{rr} c$ );

$T_{\wedge}^{\varphi r}$  - плотность потока  $\varphi$ -компоненты импульса ( $T_{\wedge}^{\varphi r} \neq T_{\wedge}^{\varphi r} c$ ).

Корректно получать поток умножением специфической плотности потока на площадь. Для потока энергии это – формула мощности, использующая вектор Пойнтинга

$$dP = T_{\wedge}^{ii} da_i^{\wedge} \quad (6.4)$$

(мы обозначаем инфинитезимальную площадку  $da_i^{\wedge}$ ).

Для потока импульса это – формула силы через давление или через напряжение сдвига

$$d\mathcal{F}^i = T_{\wedge}^{ij} da_j^{\wedge}. \quad (6.5)$$

Поток момента импульса выражается формулой момента силы

$$d\tau^{ij} = 2x^{[i} T_{\wedge}^{j]k} da_k^{\wedge}. \quad (6.6)$$

Для потока спинного момента импульса следует использовать тензор спина  $Y_{\wedge}^{ijk}$

$$d\tau_s^{ij} = Y_{\wedge}^{ijk} da_k^{\wedge}. \quad (6.7)$$

А использование произведения объемной плотности на скорость света *вдобавок* к бесспорным формулам (6.4) – (6.7) приводит к удвоению.

Неверно писать

$$dP = T_{\wedge}^{ii} dV_i^{\wedge} / dt = T_{\wedge}^{ii} da_r^{\wedge} dr / dt = T_{\wedge}^{ii} da_r^{\wedge} c, \quad (6.8)$$

$$d\mathcal{F}^i = T_{\wedge}^{ii} dV_i^{\wedge} / dt = T_{\wedge}^{ii} da_r^{\wedge} dr / dt = T_{\wedge}^{ii} da_r^{\wedge} c, \quad (6.5)$$

$$d\tau^{ij} = 2x^{[i} T_{\wedge}^{j]t} dV_t^{\wedge} / dt = 2x^{[i} T_{\wedge}^{j]t} da_r^{\wedge} dr / dt = 2x^{[i} T_{\wedge}^{j]t} da_r^{\wedge} c, \quad (6.8)$$

$$d\tau_s^{ij} = Y_{\wedge}^{ijt} dV_t^{\wedge} / dt = Y_{\wedge}^{ijt} da_r^{\wedge} dr / dt = Y_{\wedge}^{ijt} da_r^{\wedge} c. \quad (6.9)$$

Есть правильные формулы (6.4), (6.7).

## 7. Неудачная попытка интерпретировать орбитальный момент импульса как спин

Вопреки замечаниям Гайтлера, по меньшей мере два автора [23,2] рассматривают поток момента импульса (6.1) как излучение спина. Основанием для такой интерпретации является результат сравнения количества момента импульса, плотность которого равна

$$\mathbf{L}_{\wedge} = \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) / c^2, \quad (7.1)$$

с количеством спина, плотность которого выражается компонентой канонического тензора спина [24-27]

$$\mathbf{S}_\lambda = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}, \quad (7.2)$$

причем это сравнение производится несмотря на совершенно различные диаграммы направленности потока момента импульса (7.1) и потока спина (7.2). В результате ошибки вычислений, авторы приходят к выводу, что эти количества после интегрирования равны друг другу. На основании этого (ошибочного) равенства без прямого вычисления спина делается (ошибочный) вывод, что поток момента импульса (6.1) есть спин. (Заметим в скобках, что это сделано, несмотря на то, что тензор спина (7.2) не признается физиками, потому что тогда пришлось бы признать, что плоские волны несут спин). Этот вывод, однако, важен тем, что выражает уверенность в излучении спина, и в возможность подсчета его с использованием тензора спина электромагнетизма.

Приведем оригинальное рассуждения Р. Бекера [23], используя его обозначения.

The momentum density of electromagnetic radiation is

$$\mathbf{g} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} / 4\pi c, \text{ or } \mathbf{g} = \mathbf{E} \times \text{curl } \mathbf{A} / 4\pi c.$$

Expressed in component form,

$$g_i = E^k \partial_i A_k / 4\pi c - E^k \partial_k A_i / 4\pi c = g_i^{(1)} + g_i^{(2)}.$$

The angular momentum  $\mathbf{M}$  of electromagnetic radiation is

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g} \, d\mathbf{r}$$

The component  $g^{(2)}$  may be transformed by integration by part, and we obtain

$$\mathbf{M} = \int \mathbf{r} \times \mathbf{g}^{(1)} \, d\mathbf{r} + \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} \, d\mathbf{r} / 4\pi c$$

The first term is of no interest. In contrast, the second term corresponds to an intrinsic angular momentum, or "spin", of the radiation.

Однако в этом рассуждении содержится ошибка. Интегрирование по частям тут не может быть проведено. Действительно (мы используем те же обозначения),

$$\begin{aligned} \int \mathbf{r} \times \mathbf{g}^{(2)} \, d\mathbf{r} &= -2 \int r_{[j} E^k \partial_k A_{i]} \, d\mathbf{r} / 4\pi c = -2 \int \partial_k (r_{[j} E^k A_{i]}) \, d\mathbf{r} / 4\pi c + 2 \int E^k g_{k[j} A_{i]} \, d\mathbf{r} / 4\pi c = \\ &= -2 \oint r_{[j} E^k A_{i]} da_k / 4\pi c + \int \mathbf{E} \times \mathbf{A} \, d\mathbf{r} / 4\pi c. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Но интеграл по замкнутой поверхности не равен нулю,

$$\oint r_{[j} E^k A_{i]} da_k \neq 0, \quad (7.4)$$

поскольку интегранд пропорционален  $1/r^2$ .

## 8. Излучение спина вращающимся диполем

Прямое вычисление потока спина по методу [23,2], то есть при использовании произведения объемной плотности  $\mathbf{S}_\lambda = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}$  (7.2) на скорость света, выполнено в работах [28,29] в декартовых координатах.. Оно дает вдвое меньшее значение, чем поток орбитального момента импульса (5.14), (6.1). Приведем выдержку из работы [28].

«Интегрируем объёмную плотность спина,  $Y^{ij} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}$ , по шаровому слою [с подстановкой  $dr/dt = c$ ]:

$$\begin{aligned} \tau_s^{xy} &= \Re \int \epsilon_0 E_{[x} \bar{A}_{y]} r^2 d\Omega dr / dt = \Re \int i \epsilon_0 E_{[x} \bar{E}_{y]} r^2 c d\Omega / \omega \\ &= \int \frac{\omega^3}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \cos^2 \theta d\theta d\varphi = \frac{\omega^3}{12\pi \epsilon_0 c^3} [\text{Н м}]. \end{aligned}$$

Это значение вдвое меньше потока момента линейного импульса. Чего-то подобного следовало ожидать, если подынтегральному выражению,  $\mathbf{S}_\lambda = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}$ , приписывать смысл плотности спина, поскольку при излучении в пространство

фотоны летят в разные стороны, и спины их не направлены параллельно друг другу, как в луче. Так что суммарный спин оказывается тут вдвое меньше, чем в луче».

Было проделано также прямое вычисление потока спина с использованием плотности потока в радиальном направлении  $Y_{\wedge}^{ijr}$  [12,13]. Получен тот же результат:

$$\tau_z = \frac{\omega^3}{12\pi\epsilon_0 c^3} \text{ [Н м]}. \quad (8.1)$$

Особенность такого вычисления связана с тем, что перед интегрированием инфинитезимального потока спина (6.7)  $d\tau^{\theta\varphi} = Y_{\wedge}^{\theta\varphi r} da_r^{\wedge}$  по поверхности его необходимо спроектировать на ось  $z$ . Это достигается созданием тривектора  $\hat{z}^{[l} d\tau^{ij]}$  с единичным вектором, направленным вдоль  $z$

$$\hat{z}^l = \{\hat{z}^r = \cos\theta, \quad \hat{z}^\theta = -\sin\theta, \quad \hat{z}^\varphi = 0\}. \quad (8.2)$$

Поэтому формула вычисления потока спина, излучаемого нашим вращающимся диполем в направлении оси  $z$ , выглядит так

$$\tau_z = \int \hat{z}^r Y_{\wedge}^{\theta\varphi r} da_r^{\wedge} \epsilon_{r\theta\varphi}^{\sim} \sqrt{-g_{3\wedge}}. \quad (8.3)$$

Здесь  $da_r^{\wedge} = d\theta d\varphi$ , а  $\epsilon_{ij}^{\sim} \sqrt{-g_{3\wedge}}$  есть антисимметричный ковариантный псевдо тензор, соответствующий единичной антисимметричной псевдо плотности  $\epsilon_{ij}^{\sim}$ .

В связи с использованием компоненты  $Y_{\wedge}^{ijr}$ , в работах [12,13] пришлось учесть важное обстоятельство. Выражение (7.2)  $S_{\wedge} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{A}$  является компонентой  $Y_c^{ijr}$  канонического тензора спина. Эта компонента не вызывает возражений и была успешно использована в работах [28,29], однако в целом канонический тензор спина [24-27]

$$Y_c^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} F_{\wedge}^{\mu]\nu} = -A^\lambda \partial^\mu A_\wedge^\nu + A^\lambda \partial^\nu A_\wedge^\mu + A^\mu \partial^\lambda A_\wedge^\nu - A^\mu \partial^\nu A_\wedge^\lambda. \quad (8.4)$$

неудовлетворителен. На это неоднократно обращалось внимание [30,31]. В частности, компонента  $Y_c^{\theta\varphi r}$  включает в себя радиальную составляющую электрического поля,  $E_r$ ,

$$A^r = -\int E_r dt,$$

$$Y_c^{\theta\varphi r} = -A^\theta \partial^\varphi A_\wedge^r + A^\theta \partial^r A_\wedge^\varphi + A^\varphi \partial^\theta A_\wedge^r - A^\varphi \partial^r A_\wedge^\theta, \quad (8.5)$$

что недопустимо. Поэтому для вычисления спина в работах [12,13] был использован тензор спина, предложенный и использовавшийся ранее [30,31]:

$$Y_{\wedge}^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda} \partial^{|\nu|} A_{\wedge}^{\mu]}, \quad Y_{\wedge}^{\theta\varphi r} = A^\theta \partial^r A_\wedge^\varphi - A^\varphi \partial^r A_\wedge^\theta. \quad (8.6)$$

## 9. Заключение

Показано, что поток момента импульса, испускаемый вращающимся диполем с диаграммой направленности  $\sin^2 \theta$ , обеспечивается напряжением сдвига максвелловского тензора напряжений электромагнитного поля. Этот поток не является излучением, в частности, потому что он не сопровождается потоком энергии, который имеет совсем другую диаграмму направленности. Этот поток является потоком орбитального момента импульса. Он отличается от потока спина, который *излучается* вращающимся диполем с диаграммой направленности  $\cos^2 \theta$ . Таким образом, электромагнитное поле вращающегося диполя содержит два независимых потока момента импульса: орбитальный и спиновый.

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за отважную публикацию моего вопроса [32] и Н.Н. Константинову за помощь, без которой эта статья не могла бы быть написана.

## Список литературы

1. Landau, L.D., Lifshitz, E.M. *The Classical Theory of Fields*; Pergamon: N. Y., 1975. .
2. Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, (John Wiley, 1999), p. 350.
3. Corney A., *Atomic and Laser Spectroscopy* (Oxford University Press, 1977).
4. Sadowsky A. *Acta et Comm. Imp. Universitatis Jurievensis* 7, No. 1-3 (1899)
5. Poynting J. H., "The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light". *Proc. R. Soc. Lond. A* **82**, 560-567 (1909)
6. Crawford F. S., Jr., *Waves: Berkley Physics Course - V. 3* (Berkeley, California June, 1968).
7. Зоммерфельд А. Строение атома и спектры. (М.: Гостехиздат, 1956) Т. 1.
8. Вульфсон К.С. «О моменте количества движения электромагнитных волн» *УФН* **152** 667 (1987), формула (14)
9. Барабанов А. Л. «Об угловом моменте в классической электродинамике» *УФН* **163**, №11, с. 77 (1993)
10. Corney A., *Atomic and Laser Spectroscopy* (Oxford University Press, 1977).
11. Храпко Р.И. Плотность спина электромагнитных волн. <http://trudymai.ru/published.php?ID=34691> (2001)
12. Храпко Р.И. Спиновый момент импульса дипольного излучения. <http://trudymai.ru/published.php?ID=34635> (2001)
13. Khrapko R.I. "Radiation of spin by a rotator", <http://www.ma.utexas.edu/cgi-bin/mps?key=03-315> (2003)
14. Khrapko R. I. Absorption of angular momentum of a plane wave *Optik* **154** (2018) 806–810
15. Khrapko R. I. Reflection of light from a moving mirror *Optik* **136** (2017) 503–506
16. Схоутен Я.А. Тензорный анализ для физиков. (М.: Наука, 1965)
17. Schouten J. A., *Tensor Analysis for Physicists* (Clarendon, Oxford, 1951)
18. Храпко. Р.И. Наглядное представление дифференциальных форм и псевдоформ. Электromagnetизм в терминах источников и порождений полей». ISBN: 978-3-8465-0120-7 Lambert Academic Publishing, Saarbrucken 2011, <http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=105&module=files>
19. Сивухин Д. В., *Общий курс физики, том 3, часть 2* (М.: Наука, 1996) с. 24
20. Фейнман Р. et al. *Фейнмановские лекции по физике* **6** (М.: Мир, 1977)
21. Corney A., *Atomic and Laser Spectroscopy* (Oxford University Press, 1977).
22. Heitler W., *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford: Clarendon, 1954).
23. Becker R., *Electromagnetic Fields and Interactions, V. 2*, (NY, Dover, 1964), p. 320
24. Corson E M *Introduction to tensors, spinors, and reativistic wave-equation* NY, Hafner, 1953
25. Soper D. E., *Classical Field Theory* (N.Y.: Dover, 2008).
26. Barut A. O., *Electrodynamics and Classical Theory of Particles and Fields* (Macmillan, New York, 1964).
27. Khrapko R.I. Absorption of spin by a conducting medium *AASCIT Journal of Physics*. Vol. 4, No. 2, 2018, pp. 59-63
28. Храпко Р.И. Спин не есть момент импульса Spin is not a moment of momentum <http://trudymai.ru/published.php?ID=28834> (2012)
29. Khrapko R.I. Spin radiation from a rotating dipole. *Optik* **181** (2019) 1080-1084
30. Khrapko R.I. True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero [arXiv:physics/0102084](https://arxiv.org/abs/physics/0102084)
31. Khrapko R.I. Mechanical stresses produced by a light beam *J. Modern Optics*, **55**, 1487-1500 (2008)
32. Khrapko R.I. "Does plane wave not carry a spin?" *Amer. J. Phys.* **69**, 405 (2001)

## **Stationary momentum and the moment of momentum in the field of a rotating dipole**

Radi I. Khrapko\*

*Moscow Aviation Institute - Volokolamskoe shosse 4, 125993 Moscow, Russia*

Attention is drawn to the fact that speed and mass are not needed for the existence of momentum, mass flux, and momentum flux, generally speaking. However, a centripetal force is needed for a momentum flux along a curved path even in the absence of speed. In relation to the electromagnetic field of a rotating dipole, it is shown that the known angular momentum flux is not radiation, it is not associated with energy and has an orbital character. Regardless of this flux, there is a spin radiation, not noticed by modern electrodynamics.

**Key words:** classical spin; stress tensor; electrodynamics

**PACS:** 75.10.Hk; 41.20.Jb

---

\* Email: [khrapko\\_ri@hotmail.com](mailto:khrapko_ri@hotmail.com), [khrapko\\_ri@mai.ru](mailto:khrapko_ri@mai.ru) , <http://khrapkori.wmsite.ru>