Спин в стоячей электромагнитной волне

Р. И. Храпко[1]
Московский авиационный институт, 125993 Москва, Россия

Классическое выражение тензора спина электродинамики модифицировано для того, чтобы сделать возможным подсчет спина в стоячей электромагнитной волне круговой поляризации.

Ключевые слова: классический спин; круговая поляризация; электродинамика

PACS 75.10.Hk

1. Введение

В настоящее время существуют две взаимно исключающие концепции спина электромагнитных волн. Согласно Садовскому и Пойнтингу [1,2], *плотность* спина присутствует в электромагнитном излучении круговой поляризации, и эта плотность пропорциональна плотности энергии. Пойнтинг [2]:

> «Обозначив через E энергию в единице объема и через G момент силы на единицу поверхности, мы имеем $G = E\lambda / 2\pi$ »

Таким образом, электромагнитное излучение круговой поляризации представляет собой «спиновую жидкость» Вейссенхоффа. Вейссенхофф [3]:

> «Под спиновой жидкостью мы понимаем жидкость, каждый элемент которой обладает, кроме энергии и линейного импульса, также некоторым количеством углового импульса, пропорционального – так же как энергия и линейный импульс – объему этого элемента»

Исходя из этого, учебники указывают, что плоская электромагнитная волна круговой поляризации содержит плотность и плотность потока спинового момента импульса (см., например [4,5]). При этом наличие пространственной границы у волны не рассматривается как не имеющее отношения к делу. Согласно лагранжевому формализму, использующему лагранжиан $L = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$, эта плотность спина описывается каноническим тензором спина [6-8]

$$\underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}\delta_{\alpha}^{\mu]}\frac{\partial L}{\partial(\partial_{\nu}A_{\alpha})} = -2A^{[\lambda}F^{\mu]\nu}. \tag{1}$$

Здесь A^{λ} и $F^{\mu\nu}$ есть векторный магнитный потенциал и тензор электромагнитного поля, соответственно. Смысл тензора спина заключается в том, что спин объемного элемента dV_{ν} равен $dS^{\lambda\mu} = \Upsilon^{\lambda\mu\nu}dV_{\nu}$. Поэтому никакие изменения тензора спина не допустимы, если признается, что он дает реальную плотность спина излучения. В частности, не допустимы калибровочные преобразования, изменяющие ту калибровку векторного потенциала, которая дает реальную плотность спина. Тензор спина (1) успешно используется в литературе [9-17].

Одновременно существует концепция, согласно которой электромагнитная волна круговой поляризации **не** содержит спиновую плотность, пропорциональную плотности энергии; спин волны присутствует лишь на границе такой волны, как бы далеко эта граница ни располагалась. Согласно этой концепции локальная плотность спинового момента импульса j_z пропорциональна радиальному *градиенту* интенсивности u^2 в электромагнитном пучке [18]

$$j_z \sim \frac{r}{u^2}\frac{\partial(u^2)}{\partial r} \tag{2}$$

[1] Email: khrapko_ri@hotmail.com, khrapko_ri@mai.ru , http://khrapkori.wmsite.ru

Причина появления такой градиентной концепции обсуждается в статье [9]. Эта концепция широко представлена в литературе [18-25]

В данной статье предложен расчет спиновой плотности в стоячей электромагнитной волне, возникающей при нормальном падении на зеркало. Такой расчет принципиально не возможен в рамках градиентной концепции, потому что эта концепция отрицает наличие спина внутри электромагнитной волны. Предложенный подсчет вынуждает модифицировать классическое выражение (1) тензора спина.

2. Электромагнитные поля стоячей волны

Падающая на зеркало волна и отраженная волна снабжаются индексами 1 и 2, соответственно, и для них используются выражения:

$$\mathbf{E}_1 = (\mathbf{x} + i\mathbf{y})e^{iz-it}, \quad \mathbf{B}_1 = (-i\mathbf{x} + \mathbf{y})e^{iz-it} \tag{3}$$

$$\mathbf{E}_2 = (-\mathbf{x} - i\mathbf{y})e^{-iz-it}, \quad \mathbf{B}_2 = (-i\mathbf{x} + \mathbf{y})e^{-iz-it} \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ есть единичные координатные вектора, и ради простоты $\omega = k = c = \varepsilon_0 = \mu_0 = 1$. Имея в виду выражение (1), выпишем компоненты электромагнитного тензора (без экспоненциального множителя)

$$E_{1x} = F_{1tx} = 1, \quad E_{1y} = F_{1ty} = i, \quad B_{1x} = F_{1zy} = -i, \quad B_{1y} = F_{1xz} = 1, \tag{5}$$

$$E_{2x} = F_{2tx} = -1, \quad E_{2y} = F_{2ty} = -i, \quad B_{2x} = F_{2zy} = -i, \quad B_{2y} = F_{2xz} = 1, \tag{6}$$

Поднятие индексов дает, в силу сигнатуры $(+---)$,

$$F_1^{tx} = -1, \quad F_1^{ty} = -i, \quad F_1^{zy} = -i, \quad F_1^{xz} = 1, \tag{7}$$

$$F_2^{tx} = 1, \quad F_2^{ty} = i, \quad F_2^{zy} = -i, \quad F_2^{xz} = 1, \tag{8}$$

При вычислении магнитного векторного потенциала естественно использовать калибровку Вейля, $\varphi = 0$, так что $F_{tk} = \partial_t A_k = -iA_k, \quad A_k = iF_{tk}$.

$$A_{1x} = i, \quad A_{1y} = -1, \quad A_{2x} = -i, \quad A_{2y} = 1. \tag{9}$$

Поднятие индексов изменяет знаки на противоположные

$$A_1^x = -i, \quad A_1^y = 1, \quad A_2^x = i, \quad A_2^y = -1. \tag{10}$$

3. Использование канонического тензора спина

Определим сначала плотность спина в падающей волне, (черта означает комплексное сопряжение).

$$<\underset{c}{\Upsilon}{}_1^{xyt}> = -\Re\{\overline{A}_1^x F_1^{yt} - \overline{A}_1^y F_1^{xt}\}/2 = -(ii - 1\cdot 1)/2 = 1. \tag{11}$$

Плотность спина в отраженной волне, $\underset{c}{\Upsilon}{}_2^{xyt}$, естественно, такая же

$$<\underset{c}{\Upsilon}{}_2^{xyt}> = -\Re\{\overline{A}_2^x F_2^{yt} - \overline{A}_2^y F_2^{xt}\}/2 = -\{(-i)(-i) - (-1)(-1)\}/2 = 1. \tag{12}$$

Однако плотность спина в реальном поле $A^k = A_1^k + A_2^k$, $F^{kl} = F_1^{kl} + F_2^{kl}$, подсчитанная по формуле (1), содержит нефизичный осциллирующий член

$$\begin{aligned} <\underset{c}{\Upsilon}{}^{xyt}> &= -\Re\{(\overline{A}_1^x + \overline{A}_2^x)(F_1^{yt} + F_2^{yt}) - (\overline{A}_1^y + \overline{A}_2^y)(F_1^{xt} + F_2^{xt})\}/2 = \\ &= <\underset{c}{\Upsilon}{}_1^{xyt}> + <\underset{c}{\Upsilon}{}_2^{xyt}> - \Re\{\overline{A}_1^x F_2^{yt} - \overline{A}_1^y F_2^{xt} + \overline{A}_2^x F_1^{yt} - \overline{A}_2^y F_1^{xt}\}/2 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} -\Re\{\overline{A}_1^x F_2^{yt} - \overline{A}_1^y F_2^{xt} + \overline{A}_2^x F_1^{yt} - \overline{A}_2^y F_1^{xt}\}/2 &= -\{[i(-i) - 1(-1)]e^{-2iz} + [(-i)i - (-1)1]e^{2iz}\}/2 = \\ &= -2\cos 2z \end{aligned} \tag{14}$$

$$\text{Так что} \quad <\underset{c}{\Upsilon}{}^{xyt}> = 2 - 2\cos 2z. \tag{15}$$

4. Модификация канонического тензора спина

Несовершенство канонического тензора спина (1) мы увидели в том, что он неоправданно выделяет часть электромагнитного поля, которая связана с магнитным векторным потенциалом A и, соответственно, с электрическим током j. Поля этой части составляют, согласно [26,27], цепочку

$$\underset{\circ}{j}{}^{\mu}_{\wedge}\,(\partial)\,\underset{\times}{F}{}^{\mu\nu}_{\wedge}\;\star\;\underset{\circ}{F}{}_{\alpha\beta}\,(\partial)\,\underset{\times}{A}{}_{\beta}\;\star\;\underset{\circ}{A}{}^{\lambda}_{\wedge}\,. \tag{16}$$

Здесь индекс $\wedge$ отмечает тензорные плотности веса +1; пятилучевая звездочка является оператором сопряжения, $\star = g_{\beta\lambda}/\sqrt{g}_{\wedge}$ или $\star = \sqrt{g}_{\wedge} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}$; символ (∂) есть оператор границы, $(\partial)\,\underset{\times}{A}{}_{\beta} = 2\partial_{[\alpha}\,\underset{\times}{A}{}_{\beta]}$ или $(\partial)\,\underset{\times}{F}{}^{\mu\nu}_{\wedge} = \partial_{\nu}\,\underset{\times}{F}{}^{\mu\nu}_{\wedge}$; символ $\circ$ отмечает замкнутые дифференциальные формы или замкнутые векторные плотности, а $\times$ отмечает сопряжено замкнутые величины.

Канонический тензор спина составляется из полей этой цепочки $-2A^{[\lambda}F^{\mu]\nu}$.
Однако существует альтернативная цепочка полей, включающая электрический тривекторный потенциал V и плотность тока магнитных монополей ξ

$$\underset{\circ}{\xi}{}_{\gamma\alpha\beta}\,(\partial)\,\underset{\times}{F}{}_{\alpha\beta}\;\star\;\underset{\circ}{F}{}^{\mu\nu}_{\wedge}(\partial)\,\underset{\times}{V}{}^{\mu\nu\lambda}_{\wedge}\;\star\;\underset{\circ}{V}{}_{\gamma\alpha\beta}\,. \tag{17}$$

Соответствующий тензор спина должен составляться из полей $\underset{\times}{F}{}_{\alpha\beta}$ и $\underset{\circ}{V}{}_{\gamma\alpha\beta}$ этой цепочки. Для придания этому модифицированному тензору вида (1), используются дуальные выражения, получаемые с помощью антисимметричной псевдо плотности $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\sigma} = 1, \quad \varepsilon^{\mu\lambda\nu\sigma} = -1$. Мы будем отмечать псевдо величины звездочкой $*$:

$$F_{*}^{\mu\nu} = F_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}, \quad V_{*}^{\mu} = V_{\alpha\beta\gamma}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\,. \tag{18}$$

Таким образом получается модифицированный тензор спина

$$\underset{*}{\Upsilon}{}^{\lambda\mu\nu} = -2V_{*}^{[\lambda}F_{*}^{\mu]\nu}\,. \tag{19}$$

Возможно, существует рассуждение, позволяющее получить такой тензор спина из канонического формализма.

5. Использование модифицированного тензора спина (19)

Аналогом калибровки Вейля $\varphi = 0$ является $V^{xyz} = 0$. Поэтому для получения электрического потенциала из формулы $F^{\mu\nu} = \partial_{\lambda}V^{\mu\nu\lambda}$ используется только $F^{kl} = \partial_{t}V^{klt} = -iV^{klt}, \quad V^{klt} = iF^{kl}$. Значения (7), (8) дают контравариантный электрический потенциал в рассматриваемой ситуации стоячей волны.

$$V_{1}^{zyt} = 1, \quad V_{1}^{xzt} = i, \quad V_{2}^{zyt} = 1, \quad V_{2}^{xzt} = i\,. \tag{20}$$

Опускание индексов не изменяет эти значения

$$V_{1zyt} = 1, \quad V_{1xzt} = i, \quad V_{2zyt} = 1, \quad V_{2xzt} = i\,. \tag{21}$$

После дуализации с помощью $\varepsilon^{xyzt} = 1$, $\varepsilon^{yxzt} = -1$ получаются величины для составления модифицированного тензора спина в рассматриваемой ситуации

$$V_{*1}^{x} = V_{*2}^{x} = V_{1zyt}\varepsilon^{zytx} = 1, \quad V_{*1}^{y} = V_{*2}^{y} = V_{1xzt}\varepsilon^{xztx} = i, \tag{22}$$

$$F_{*1}^{xt} = F_{*2}^{xt} = F_{1zy}\varepsilon^{zyxt} = i, \quad F_{*1}^{yt} = F_{*2}^{yt} = F_{1xz}\varepsilon^{xzyt} = -1\,. \tag{23}$$

Определяем сначала плотность спина в падающей волне

$$<\underset{*}{\Upsilon}{}_{1}^{xyt}> = -\Re\{\bar{V}_{*1}^{x}F_{*1}^{yt} - \bar{V}_{*1}^{y}F_{*1}^{xt}\}/2 = -(1(-1)-(-i)i)/2 = 1\,. \tag{24}$$

Плотность спина в отраженной волне, $\underset{*}{\Upsilon}{}_{2}^{xyt}$, естественно, такая же

$$<\underset{*}{\Upsilon}{}_{2}^{xyt}> = -\Re\{\bar{V}_{*2}^{x}F_{*2}^{yt} - \bar{V}_{*2}^{y}F_{*2}^{xt}\}/2 = -\{1(-1)-(-i)i)\}/2 = 1\,. \tag{25}$$

Однако плотность спина в реальном поле $V_{*}^{k} = V_{*1}^{k} + V_{*2}^{k}$, $F_{*}^{kl} = F_{*1}^{kl} + F_{*2}^{kl}$, подсчитанная по формуле (19), содержит нефизичный осциллирующий член, аналогичный (14), но с противоположным знаком

$$-\Re\{\bar{V}^x_{*1}F^{yt}_{*2}-\bar{V}^y_{*1}F^{xt}_{*2}+\bar{V}^x_{*2}F^{yt}_{*1}-\bar{V}^y_{*2}F^{xt}_{*1}\}/2=-\{[1(-1)-(-i)i]e^{-2iz}+[1(-1)-(-i)i]e^{2iz}\}/2= \\ =2\cos 2z \tag{26}$$

$$\text{Так что} \quad <\underset{*}{\Upsilon}^{xyt}>=2+2\cos 2z\,. \tag{27}$$

Поскольку в электромагнитном излучении равноправно присутствуют поля обеих цепочек, естественно в качестве тензора спина использовать полусумму канонического и модифицированного тензоров

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu}=(\underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu}+\underset{*}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu})/2 \tag{28}$$

В рассматриваемом случае стоячей волны такой обобщенный тензор спина дает правильный результат

$$\Upsilon^{\lambda\mu\nu}=2\,. \tag{29}$$

Подобный результат был получен ранее с использованием обобщенного *потенциального* тензора спина [28].

6. Заключение

Представленное здесь успешное использование обобщения канонического тензора спина подтверждает наличие спина в плоской волне круговой поляризации.

Я благодарен профессору Роберту Ромеру за отважную публикацию [29].

Литература

[1] Sadowsky A 1899 *Acta et Comm. Imp. Universitatis Jurievensis* **7** No. 1-3

[2] Poynting J H 1909 *Proc. R. Soc. Lond.* A **82** 560-567

[3] Weyssenhoff J and Raabe A 1947 *Acta Phys. Polon.* **9** 7-19

[4] Crawford F S Jr. 1968 *Waves: Berkley Physics Course* vol 3 (Berkeley California)

[5] Feynman R P, Leighton R B and Sands M 1965 *The Feynman Lectures on Physics* vol 3 (Addison–Wesley London) p 17–10

[6] Corson E M 1953 *Introduction to Tensors, Spinors, and Reativistic Wave-equation* (N Y Hafner) p 71

[7] Soper D E 2008 *Classical Field Theory* (N Y Dover) p 114

[8] Barut A O 1964 *Electrodynamics and Classical Theory of Particles and Fields* (Macmillan New York) p 102

[9] Khrapko R I 2018 Absorption of Spin by a Conducting Medium *AASCIT Journal of Physics* **4** 59-63 http://www.aascit.org/journal/archive2?journalId=977&paperId=6355

[10] Khrapko R I 2018 Absorption of spin from an electromagnetic wave *Optik* **154** 806–810 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=161&module=files

[11] Khrapko R I 2019 *J. Phys.: Conf. Ser.* 1172 012055 https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1172/1/012055/pdf

[12] Khrapko R I 2008 *J. Modern Optics* **55** 1487-1500 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=9&module=files

[13] Khrapko R I 2017 Reflection of light from a moving mirror *Optik* **136** 503–506 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=153&module=files

[14] Khrapko R I 2019 Spin radiation from a rotating dipole. *Optik* **181** 1080-1084 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=172&module=files

[15] Khrapko R I 2020 Radiation damping of a rotating dipole *Optik* **203** 164021 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=189&module=files

[16] Khrapko R I 2020 Absorption of spin of a plane circularly polarized wave *Optik* **210** 164527 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=187&module=files

[17] Khrapko R I 2020 Angular momentum emission by a rotating dipole *IJME* в печати http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=190&module=files

[18] Allen L and Padgett M J 2002 *Am. J. Phys*. **70** 567

[19] Heitler W 1954 *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford: Clarendon) p 401

[20] Ohanian H C 1986 *Amer. J. Phys*. 54 500-505
[21] Allen L, Padgett M J and Babiker M 1999 *Progress in Optics XXXIX* (Elsevier, Amsterdam) p 291
[22] Allen L, Barnett S M and Padgett M J 2003 *Optical Angular Momentum* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia)
[23] Gotte J B and Barnett S M 2013 *The Angular Momentum of Light* (Cambrige) p 7
[24] Simmonds J W and Guttmann M J 1970 *States, Waves and Photons* (Addison-Wesley Reading MA)
[25] Jackson J D 1999 *Classical Electrodynamics* (John Wiley) p 350
[26] Khrapko R I 2001 Violation of the gauge equivalence arXiv:physics/0105031
[27] Храпко Р.И. Наглядное представление дифференциальных форм и псевдоформ. Электромагнетизм в терминах источников и порождений полей». ISBN: 978-3-8465-0120-7 Lambert Academic Publishing, Saarbrucken 2011, http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=105&module=files
[28] Khrapko R I 2001 True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero https://arxiv.org/abs/physics/0102084
[29] Khrapko R I 2001 Does plane wave not carry a spin? *Amer. J. Phys*. **69** 405 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=10&module=files

Spin in a standing electromagnetic wave

Khrapko R. I.

The classical expression for the spin tensor of electrodynamics is modified to make it possible to count the spin in a standing electromagnetic wave of circular polarization.