Поглощение спина и импульса электромагнитной волны круговой поляризации

Р. И. Храпко[1]

Московский авиационный институт, Москва, 125993

В рамках классической электродинамики показано, что поглощение спина плоской волны круговой поляризации является таким же естественным процессом, как поглощение импульса волны

Ключевые слова: классический спин; электродинамика

PACS 75.10.Hk

1. Введение

С 19 века известно [1,2], что электромагнитное излучение круговой поляризации содержит плотность момента импульса, не зависимо от того, принимается во внимание граница этого излучения, или граница не рассматривается. В частности Пойнтингу [2] принадлежит соотношение $G = E\lambda / 2\pi$, в котором E означает энергию в единице объема, а G представляет момент импульса, прошедший через единичную площадку за единицу времени, то есть момент силы, действующий на единичную площадку. Именно такой *распределенный* момент силы рассмотрен в [3]. Там показано, что распределенный момент силы вызывает специфические механические напряжения, описываемые не симметричным тензором напряжений.

Соотношение $G = E\lambda / 2\pi$ хорошо известно. Оно приведено, в частности, в сборнике [4]. Крауфорд [5] подчеркивает: «Плоская волна может переносить угловой импульс, кроме энергии и линейного импульса». Фейнман рассказывает [6], как возникает распределенный момент силы в «стенке, способной поглотить такое излучение»: «Электрическое поле $\mathbf{E}$ с течением времени поворачивается, но так же поворачивается и смещение $\mathbf{r}$ электрона от положения равновесия. Скорость получения энергии, равна скорости электрона v, умноженной на компоненту $\mathbf{E}_t$, параллельную этой скорости, $dW / dt = e\mathbf{E}_t v$. Но у электрона в это время увеличивается и момент количества движения, потому что он все время испытывает действие момента силы, вращающей его вокруг начала координат. Момент силы равен $e\mathbf{E}_t r$, и он равен скорости изменения момента количества движения $dJ / dt = e\mathbf{E}_t r$. Вспоминая, что $v = \omega r$, имеем $dJ / dW = 1/\omega$». Естественно, плотность момента импульса излучения пропорциональна плотности энергии.

Аналогично, Бет [7] пишет: «Момент силы, производимый действием электрического поля $\mathbf{E}$ на поляризацию среды $\mathbf{P}$ в единице объема, равен $\tau_\wedge = \mathbf{P}\times\mathbf{E}$». Знаменитый эксперимент Бета подтвердил эту концепцию [8]. Идея Бета использовать момент силы для подсчета воздействия волны на диэлектрик или на магнетик использована в [9].

В 20 веке эта плотность момента импульса излучения описывается канонической плотностью спина (короче, тензором спина) [10-12]

$$\underset{c}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = -2A^{[\lambda}\delta^{\mu]}_\alpha \frac{\partial \mathsf{L}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} = -2A^{[\lambda}F^{\mu]\nu}. \tag{1.1}$$

Где $\mathsf{L} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4$ есть лагранжиан свободного электромагнитного поля, A^λ - векторный потенциал и $F_{\mu\nu}$ - тензор электромагнитного поля. Локальный смысл тензора спина $\Upsilon^{\lambda\mu\nu}$ заключается в следующем. Спин 4-элемента dV_ν есть $dS^{\lambda\mu} = \Upsilon^{\lambda\mu\nu} dV_\nu$. Это означает,

---

[1] Email: khrapko_ri@hotmail.com, khrapko_ri@mai.ru , http://khrapkori.wmsite.ru

например, что компонент $dS^{xy} = dS_z$ спина, который прошел сквозь площадку da_z за время dt, равен $dS^{xy} = \Upsilon^{xyz} da_z dt$, то есть Υ^{xyz} является плотностью потока спина в направлении оси *z*. Именно эту величину Пойнтинг назвал G.

Вейссенхофф [13] определил *спиновую жидкость*, как «жидкость, каждый элемент которой обладает, кроме энергии и линейного импульса, также определенным количеством углового импульса, пропорционального – подобно энергии и линейному импульсу – объему этого элемента». Согласно этому определению, электромагнитное излучение круговой поляризации представляет собой спиновую жидкость.

.

2. Электромагнитная волна круговой поляризации

Электромагнитные поля $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ волны круговой поляризации, распространяющейся в направлении оси *z*, выражаются компонентами тензора электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \{F_{tx} = 1,\ F_{ty} = i,\ F_{zy} = -i\breve{k} / \omega,\ F_{xz} = \breve{k} / \omega\} E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t} \quad (2.1)$$

Волновое число $\breve{k} = k' + ik''$, вообще говоря, комплексное. Это отмечено значком breve. Выражение (2.1) оправдано тем, что оно удовлетворяет первой паре уравнений Максвелла $\partial_{[\lambda} F_{\mu\nu]} = 0$. Конкретные значения волнового числа $\breve{k}$ и полей $\mathbf{D}, \mathbf{H}$, которые выражаются компонентами $\underset{\wedge}{F}^{\alpha\beta}$ тензорной плотности, зависят от среды, в которой распространяется волна. В общем случае, среда характеризуется комплексными величинами $\breve{\mu}, \breve{\varepsilon}$ и вещественной электропроводимостью σ.

Переход от тензора $F_{\mu\nu}$ к тензорной плотности $\underset{\wedge}{F}^{\alpha\beta}$ осуществляется посредством *сопряжения* [14], которое предполагает поднятие координатных индексов и включает в себя множитель $\sqrt{g}_{\wedge}$, где g есть определитель метрического тензора используемых координат, и множитель $\sqrt{\varepsilon_0 / \mu_0}$, обеспечивающий общепринятое изменение размерности. Кроме того, электрическое поле умножается на $\breve{\varepsilon}$, а магнитное поле делится на $\breve{\mu}$. Электропроводность среды не влияет на сопряжение.

Мы используем координаты с выражением интервала

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad \sqrt{g}_{\wedge} = c \quad (2.2)$$

Поэтому

$$\underset{\wedge}{F}^{\alpha\beta} = \{\underset{\wedge}{F}^{tx} = -\breve{\varepsilon}\varepsilon_0,\ \underset{\wedge}{F}^{ty} = -i\breve{\varepsilon}\varepsilon_0,\ \underset{\wedge}{F}^{zy} = -i\breve{k} / \omega\breve{\mu}\mu_0,\ \underset{\wedge}{F}^{xz} = \breve{k} / \omega\breve{\mu}\mu_0\} E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t}. \quad (2.3)$$

Для обозначения тензорных плотностей мы используем значок $\wedge$, вместо готического шрифта.

Вторая пара уравнений Максвелла, $\underset{\wedge}{j}^{\beta} = \partial_\alpha \underset{\wedge}{F}^{\alpha\beta}$, дает плотность тока

$$\underset{\wedge}{j}^{x} = (i\omega\breve{\varepsilon}\varepsilon_0 - i\breve{k}^2 / \omega\breve{\mu}\mu_0) E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t}, \quad (2.4)$$

$$\underset{\wedge}{j}^{y} = (-\omega\breve{\varepsilon}\varepsilon_0 + \breve{k}^2 / \omega\breve{\mu}\mu_0) E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t}, \quad (2.5)$$

а потому закон Ома, $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, дает значение волнового числа

$$\breve{k}^2 = i\sigma\omega\breve{\mu}\mu_0 + \omega^2\breve{\varepsilon}\varepsilon_0\breve{\mu}\mu_0. \quad (2.6)$$

3. Тензор спина

В этой статье для подсчета поглощения спина и импульса волны не рассматриваются силы, действующие на среду, как это было в [9]. Вместо этого используются тензоры спина и энергии-импульса. В качестве тензора спина, вместо канонического тензора (1.1), используется модифицированный тензор спина [15,16]

$$\underset{\wedge}{\Upsilon}^{\lambda\mu\nu} = A^\lambda \partial^\nu \underset{\wedge}{A}^\mu - A^\mu \partial^\nu \underset{\wedge}{A}^\lambda. \quad (3.1)$$

Дело в том, что канонический тензор (1.1) правильно описывает поток спина в направлении распространения волны. Действительно, векторный потенциал для поля (2.1) без $E_0 e^{ikz-i\omega t}$

$$A_x = \int F_{tx} dt = i/\omega,\ A^x = -i/\omega, \quad A_y = \int F_{ty} dt = -1/\omega,\ A^y = 1/\omega \tag{3.2}$$

дает

$$\left\langle \underset{c}{\Upsilon}{}_{\wedge}^{xyz} \right\rangle = \Re\{-\bar{A}^x F_{\wedge}^{yz} + \bar{A}^y F_{\wedge}^{xz}\} E_0^2 / 2 = E_0^2 \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}/\omega, \tag{3.3}$$

что соответствует плотности мощности $E_0^2 \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$. Поэтому канонический тензор мог успешно использоваться в работах [9,17-23]. Однако этот тензор дает неправильный результат для направлений, перпендикулярных направлению распространения. Например, вместо нуля, мы имеем

$$\left\langle \underset{c}{\Upsilon}{}_{\wedge}^{zxy} \right\rangle = \Re\{\bar{A}^x F_{\wedge}^{zy}\}/2 = \Re\{(i/\omega)(-ik/\omega\mu_0)\} E_0^2 / 2 = E_0^2 \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}/2\omega. \tag{3.4}$$

4. Поглощение спина

Для использования тензора спина (3.1) необходимо вычислить сопряженные векторные потенциалы $A_{\wedge}^{\lambda}$. Они получаются из (3.2):

$$A_{\wedge}^x = A_x \sqrt{g}\,{}_{\wedge}g^{xx} \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}/\breve{\mu} = -i/\omega\breve{\mu}\mu_0,\ A_{\wedge}^y = 1/\omega\breve{\mu}\mu_0. \tag{4.1}$$

Учитывая, что $\partial^i = -\partial_i$ из-за сигнатуры метрики $(+---)$, мы имеем плотность потока спинового момента импульса, то есть момент силы, приходящийся на единичную площадку.

$$\begin{aligned} <\Upsilon_{\wedge}^{xyz}> &= \Re\{\bar{A}^x \partial^z A_{\wedge}^y - \bar{A}^y \partial^z A_{\wedge}^x\}/2 \\ &= \Re\{(i/\omega)(-i\breve{k})(1/\omega\breve{\mu}\mu_0) - (1/\omega)(-i\breve{k})(-i/\omega\breve{\mu}\mu_0)\} E_0^2 e^{-2k''z}/2 = \Re\{\breve{k}/\breve{\mu}\} E_0^2 e^{-2k''z}/\omega^2\mu_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Объемная плотность момента силы получается дифференцированием

$$\tau_{\wedge} = -\partial_z <\Upsilon_{\wedge}^{xyz}> = -\partial_z \Re\{\breve{k}/\breve{\mu}\} E_0^2 e^{-2k''z}/\omega^2\mu_0 = 2k''\Re\{\breve{k}/\breve{\mu}\} E_0^2 e^{-2k''z}/\omega^2\mu_0. \tag{4.3}$$

В случае действительных ε, μ, $\Re\{\breve{k}/\breve{\mu}\} = k'/\mu$. На основе (2.6)

$$k'^2 + 2ik'k'' - k''^2 = i\sigma\omega\mu\mu_0 + \omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0, \tag{4.4}$$

$$2k'k'' = \sigma\omega\mu\mu_0. \tag{4.5}$$

Однако $\sigma E_0 = j$ есть плотность тока, а $E_0/\omega = A$ есть векторный потенциал. Поэтому объемная плотность момента силы выражается просто $\tau_{\wedge} = jA$. Этому выражению можно придать векторный смысл

$$\tau_{\wedge}^{\lambda\mu} = -\partial_\nu \Upsilon^{\lambda\mu\nu} = -\partial_\nu A^\lambda \partial^\nu A^\mu + \partial_\nu A^\mu \partial^\nu A^\lambda - A^\lambda \partial_\nu^\nu A^\mu + A^\mu \partial_\nu^\nu A^\lambda. \tag{4.6}$$

Первая пара слагаемых сокращается благодаря антисимметрии

$$\partial_\nu A^\lambda \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A^\mu \partial^\nu A^\lambda = 2g^{\nu\sigma}\partial_\nu A^{[\mu}\partial_\sigma A^{\lambda]} = 0. \tag{4.7}$$

А во второй паре появляется плотность тока [24 (12.123)]: $\partial_\nu^\nu A^\mu = j^\mu$

Таким образом получаем аналог силы Лоренца

$$-\partial_\nu \Upsilon^{\lambda\mu\nu} = \tau_{\wedge}^{\lambda\mu} = 2j^{[\lambda}A^{\mu]} \quad \text{или} \quad \tau_{\wedge} = \mathbf{j}\times\mathbf{A}. \tag{4.8}$$

5. Поглощение линейного импульса

Для сравнения приведем аналогичный расчет импульса. Плотность потока импульса, то есть давление описывается компонентой тензора энергии-импульса [24]

$$T_{\wedge}^{zz} = -g^{zz}(F_{zx}F_{\wedge}^{zx} + F_{zy}F_{\wedge}^{zy}) + g^{zz}F_{\mu\nu}F_{\wedge}^{\mu\nu}/4. \tag{5.1}$$

Это означает

$$<T_{\wedge}^{zz}> = \Re\{\bar{F}_{zx}F_{\wedge}^{zx} + \bar{F}_{zy}F_{\wedge}^{zy} - \bar{F}_{tx}F_{\wedge}^{tx} - \bar{F}_{ty}F_{\wedge}^{ty}\}/4. \tag{5.2}$$

Используем (2.1) и (2.3)

$$<T_{\wedge}^{zz}> = \Re\{\bar{k}\breve{k}/\omega^2\breve{\mu}\mu_0 + \breve{\varepsilon}\varepsilon_0\} E_0 e^{i\breve{k}z-i\omega t}/2. \tag{5.3}$$

Однако, в силу (2.6)

$$\breve{\varepsilon}\varepsilon_0 = \breve{k}^2 / \omega^2 \breve{\mu}\mu_0 - i\sigma / \omega. \tag{5.4}$$

Поэтому

$$< T_\wedge^{zz} >= \Re\{(k^2 + \breve{k}^2) / \omega^2 \breve{\mu}\mu_0\} E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t} / 2 = k' \Re\{\breve{k} / \breve{\mu}\} E_0^2 e^{-2k''z} / \omega^2 \mu_0 . \tag{5.5}$$

Это выражение отличается от (4.2) так же как импульс фотона p отличается от его спина $\hbar$

$$p = \hbar / \lambda\!\!\!^- . \tag{5.6}$$

Аналогично (4.3), находится объемная плотность силы

$$f_\wedge^z = -\partial_z < T_\wedge^{zz} >= 2k''k' \Re\{\breve{k} / \breve{\mu}\} E_0^2 e^{-2k''z} / \omega^2 \mu_0 . \tag{5.7}$$

В случае действительных ε, μ, $2k'k'' = \sigma\omega\mu\mu_0$. Однако $\sigma E_0 = j$, а, в силу (2.1), $k'E_0 / \omega = B$. Так что получается сила Лоренца $f_\wedge = j_\wedge B$

Этому выражению можно придать векторный смысл

$$f_\wedge^\mu = -\partial_\nu T_\wedge^{\mu\nu} = g^{\mu\lambda}(\partial_\nu F_{\lambda\sigma} F_\wedge^{\nu\sigma} + F_{\lambda\sigma}\partial_\nu F_\wedge^{\nu\sigma} - \partial_\lambda F_{\rho\sigma} F_\wedge^{\rho\sigma} - F_{\rho\sigma}\partial_\lambda F_\wedge^{\rho\sigma}) . \tag{5.8}$$

Во втором слагаемом содержится ток $j_\wedge^\sigma = \partial_\nu F_\wedge^{\nu\sigma}$. Так что это слагаемое дает силу Лоренца

$$f_\wedge^\mu = g^{\mu\lambda} j_\wedge^\sigma F_{\lambda\sigma}, \quad \mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} . \tag{5.9}$$

Можно показать, что оставшиеся три слагаемые взаимно сокращаются при отсутствии диэлектрика и магнетика с потерями.

6. Заключение

Тензор спина, описывающий спин электромагнитного излучения, является такой же естественной конструкцией, как тензор энергии-импульса, описывающий энергию и импульс.

Я бесконечно благодарен Роберту Ромеру за отважную публикацию вопроса, «Действительно ли плоская волна не несет спин?» [25].

Список литературы

[1] Sadowsky A. *Acta et Comm. Imp. Universitatis Jurievensis* **7**, No. 1-3 (1899)

[2] Poynting J. H., "The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light". *Proc. R. Soc. Lond. A* **82**, 560-567 (1909)

[3] Khrapko R.I. "Mechanical stresses produced by a light beam" *J. Modern Optics*, **55**, 1487-1500 (2008) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=9&module=files

[4] Allen L., S. M. Barnett, M. J. Padgett *Optical Angular Momentum* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia 2003)

[5]] Crawford F.S., Jr., *Waves: Berkley Physics Course* - V. 3 (Berkeley, California June, 1968), p. 364

[6] Feynman R. P., R. B. Leighton, M. Sands, *The Feynman Lectures on Physics* (Addison–Wesley, London, 1965) Vol. 3, p. 17–10.

[7]] Beth R. A., Mechanical detection and measurement of the angular momentum of light *Phys. Rev*. **50**, 115 (1936).

[8] Khrapko R.I. “Inexplicability of the Beth’s experiment within the framework of Maxwell's electrodynamics**”** *J. Modern Optics* 2021, **68**, No. 21, 1181–1186 http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=195&module=files

[9] Khrapko R.I. Absorption of spin from an electromagnetic wave *Optik* **154** 806–810 (2018) http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=161&module=files

[10] Jauch J. M. and Rohrlich F. *The Theory of Photons and Electrons* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1976)

[11] Soper D. E., *Classical Field Theory* (N.Y.: Dover, 2008), p. 114

[12] Corson E M *Introduction to tensors, spinors, and reativistic wave-equation* NY, Hafner, 1953 p.71

[13] Weyssenhoff Jan and Raabe A. Relativistic dynamics of spin-fluids and spin particles. *Acta Physica Polonica* Vol. 9, p. 7 (1947)
[14] Храпко Р.И. Наглядное представление дифференциальных форм и псевдоформ. Lambert Academic Publishing, Saarbrucken 2011, http://khrapkori.wmsite.ru/ftpgetfile.php?id=105&module=files
[15] Khrapko R. I. True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero https://arxiv.org/abs/physics/0102084
[16] Khrapko R. I. Violation of the gauge equivalence arXiv:physics/0105031
[17] Khrapko R. I. Absorption of Spin by a Conducting Medium *AASCIT Journal of Physics* Vol. 4, No. 2, Page: 59-63 (2018)
[18] Khrapko R. Unknown spin radiation *J. Phys.: Conf. Ser.* **1172** 012055 (2019)
[19] Khrapko R. I. Origin of Spin: Paradox of the classical Beth experiment. In *Unfolding the Labyrinth: Open Problems in Mathematics, Physics, Astrophysics, and other areas of science* (Hexis - Phoenix 2006), pp. 57-71 https://arxiv.org/abs/math/0609238
[20] Khrapko R. I. "Reflection of light from a moving mirror" *Optik* **136** (2017) 503–506
[21] Khrapko R. I. Spin radiation from a rotating dipole. *Optik* **181** (2019) 1080-1084
[22] Khrapko R. I. Radiation damping of a rotating dipole *Optik*. **203** February 2020 Article 164021
[23] Khrapko R. I. Absorption of spin of a plane circularly polarized wave *Optik* March 2020 Article 164527
[24] Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, (John Wiley, 1999).
[25] Khrapko R.I. Does plane wave not carry a spin? *Amer. J. Phys*. **69**, 405 (2001)

Absorption of the spin and momentum of an electromagnetic wave of circular polarization

Within the framework of classical electrodynamics, it is shown that the absorption of the spin of a plane wave of circular polarization is the same natural process as the absorption of its momentum.
Keywords: classical spin; electrodynamics