Сила Лоренца при отсутствии зарядов и токов

Р. И. Храпко[1]
Московский авиационный институт, Москва, 125993

Известное выражение силы Лоренца дополнено слагаемым, описывающим силу, действующую на вещество при отсутствии зарядов и токов

Силой Лоренца,

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{j}\times\mathbf{B}, \quad f_\gamma = j^\beta F_{\gamma\beta}, \tag{1}$$

называется сила, с которой электромагнитное поле $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ действует на плотность *свободных* электрических зарядов ρ и плотность свободных электрических токов $\mathbf{j}$. Выражение (1) получается в качестве дивергенции со знаком минус, взятой от тензора энергии-импульса электромагнитного поля [1 (33,1)]

$$T_\gamma^\alpha = -F_{\gamma\beta}F^{\alpha\beta} + \delta_\gamma^\alpha F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4. \tag{2}$$

Действительно,

$$-\partial_\alpha T_\gamma^\alpha = \partial_\alpha F_{\gamma\beta}F^{\alpha\beta} + F_{\gamma\beta}\partial_\alpha F^{\alpha\beta} - \partial_\gamma F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/4 - F_{\alpha\beta}\partial_\gamma F^{\alpha\beta}/4. \tag{3}$$

Далее, третье и четвертое слагаемые считаются равными друг другу, записывается

$$-\partial_\gamma F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/4 - F_{\alpha\beta}\partial_\gamma F^{\alpha\beta}/4 = -\partial_\gamma F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}/2, \tag{4}$$

и в отношении этого выражения используется «первая пара уравнений Максвелла», выражающая факт отсутствия в природе магнитных зарядов и токов

$$\xi_{\gamma\alpha\beta} \equiv \partial_\gamma F_{\alpha\beta} + \partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} = 0. \tag{5}$$

Во втором слагаемом используется «вторая пара уравнений Максвелла»

$$j^\beta = \partial_\alpha F^{\alpha\beta}. \tag{6}$$

В результате получается

$$-\partial_\alpha T_\gamma^\alpha = \partial_\alpha F_{\gamma\beta}F^{\alpha\beta} + F_{\gamma\beta}j^\beta + \partial_\alpha F_{\beta\gamma}F^{\alpha\beta}/2 + \partial_\beta F_{\gamma\alpha}F^{\alpha\beta}/2. \tag{7}$$

Теперь утверждается, что перестановкой индексов можно доказать, что три члена в (7) взаимно сокращаются и остается сила Лоренца [1 (33,7)]

$$-\partial_\alpha T_\gamma^\alpha = j^\beta F_{\gamma\beta}. \tag{8}$$

Однако, в действительности, очевидно, что сила взаимодействия электромагнитного поля с веществом не ограничивается этой величиной. В частности, рассмотрим, например, электромагнитную волну, поглощаемую диэлектриком с потерями. При поглощении волны, импульс, присущий волне, переходит в диэлектрик. Диэлектрик испытывает давление, а сила (1) или (8) равна нулю, поскольку ток равен нулю. Так что результат (8) нуждается в корректировке для общего случая.

Ошибка представленного выше расчета заключается в приравнивании друг другу слагаемых (4)

$$\partial_\gamma F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}\partial_\gamma F^{\alpha\beta} \tag{9}$$

Действительно, рассмотрим затухающую линейно поляризованную волну, электромагнитные поля которой даются выражениями

$$\{F_{tx} = 1, \quad F_{xz} = \breve{k}/\omega\}E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t}, \tag{10}$$

$$\{F^{tx} = -\breve{\varepsilon}\varepsilon_0, \; F^{xz} = \breve{k}/\omega\mu_0\}E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t}. \tag{11}$$

---

[1] Email: khrapko_ri@hotmail.com, khrapko_ri@mai.ru , http://khrapkori.wmsite.ru

Здесь использованы комплексное волновое число $\breve{k} = k' + ik''$ и комплексная диэлектрическая постоянная $\breve{\varepsilon} = \varepsilon' + i\varepsilon''$. Вычисление средних по времени значений величин, приравненных друг к другу равенством (9), дает для них различающиеся значения.

$$\Re\{\overline{\partial_z F_{\alpha\beta}} F^{\alpha\beta}\}/2 = \Re\{\overline{\partial_z F_{tx}} F^{tx} + \overline{\partial_z F_{xz}} F^{xz}\} = \Re\{i\bar{k}\breve{\varepsilon}\varepsilon_0 - i\bar{k}^2\breve{k}/\omega^2\mu_0\}, \tag{12}$$

$$\Re\{\overline{F_{\alpha\beta}}\partial_z F^{\alpha\beta}\}/2 = \Re\{\overline{F_{tx}}\partial_z F^{tx} + \overline{F_{xz}}\partial_z F^{xz}\} = \Re\{-i\breve{k}\breve{\varepsilon}\varepsilon_0 + i\bar{k}\breve{k}^2/\omega^2\mu_0\}, \tag{13}$$

здесь прямая черта означает комплексное сопряжение и опущены экспоненциальные множители.

Учитывая это обстоятельство, мы предприняли аккуратное вычисление дивергенции тензора энергии-импульса. При этом не считались равными нулю (отсутствующие в природе) магнитные токи и заряды $\xi_{\gamma\alpha\beta}$. Так что заодно была получена магнитная часть силы Лоренца (если считать (1) и (8) электрической частью силы Лоренца). Были получены также дополнительные члены, описывающие силы, действующие на вещество со стороны электромагнитного поля при отсутствии токов и зарядов.

Вычисление заключается в том, что в выражении (3) первое слагаемое справа делится пополам, причем изменяется знак за счет перестановки индексов

$$\partial_\alpha F_{\gamma\beta} F^{\alpha\beta} = -\partial_\alpha F_{\beta\gamma} F^{\alpha\beta}/2 - \partial_\beta F_{\gamma\alpha} F^{\alpha\beta}/2. \tag{14}$$

Третье слагаемое представляется в виде двух членов

$$-\partial_\gamma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 = -\partial_\gamma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/2 + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4. \tag{15}$$

В результате справа получается шесть членов

$$-\partial_\alpha T^\alpha_\gamma = -\partial_\alpha F_{\beta\gamma} F^{\alpha\beta}/2 - \partial_\beta F_{\gamma\alpha} F^{\alpha\beta}/2 + j^\beta F_{\gamma\beta} - \partial_\gamma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/2 + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 - F_{\alpha\beta}\partial_\gamma F^{\alpha\beta}/4. \tag{16}$$

Первый, второй и четвертый члены содержат магнитный 4-ток (5) и представляют собой магнитную часть силы Лоренца

$$\underset{m}{f}_\gamma = -\xi_{\gamma\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/2. \tag{17}$$

Два последних члена представляют силу, действующую на диэлектрик или на магнетик

$$\underset{d}{f}_\gamma = \partial_\gamma F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}/4 - F_{\alpha\beta}\partial_\gamma F^{\alpha\beta}/4. \tag{18}$$

В результате, обобщенная сила Лоренца состоит из трех слагаемых

$$-\partial_\alpha T^\alpha_\gamma = \underset{m}{f}_\gamma + f_\gamma + \underset{d}{f}_\gamma. \tag{19}$$

Мы продемонстрируем теперь, как выражение (18) позволяет вычислить давление на диэлектрик, поглощающий волну (10), (11). Найдем сначала условие отсутствия тока в такой волне (мы опускаем экспоненциальный множитель):

$$j^x = \partial_t F^{tx} + \partial_z F^{zx} = -i\omega(-\breve{\varepsilon}\varepsilon_0) + i\breve{k}(-\breve{k}/\omega\mu_0) = 0. \tag{20}$$

Это дает

$$\breve{\varepsilon}\varepsilon_0 = \breve{k}^2/\omega^2\mu_0, \tag{21}$$

и, вместо (10), (11), электромагнитные поля затухающей линейно поляризованной волны в диэлектрике даются выражениями

$$\{F_{tx} = 1, \quad F_{xz} = \breve{k}/\omega\} E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t} \tag{22}$$

$$\{F^{tx} = -\breve{k}^2/\omega^2\mu_0, F^{xz} = \breve{k}/\omega\mu_0\} E_0 e^{i\breve{k}z - i\omega t} \tag{23}$$

Для вычисления объемной силы по формуле (18) достаточно просто составить разность выражений (12) и (13), разделить на 4 и воспользоваться (21). Это дает

$$\begin{aligned} \underset{d}{f}_z &= \Re\{i(\bar{k} + \breve{k})\varepsilon\varepsilon_0 - i(\bar{k} + \breve{k})k^2/\omega^2\mu_0\} E_0^2 e^{-2k''z}/4 \\ &= \Re\{i2k'\breve{k}^2\} E_0^2 e^{-2k''z}/4\omega^2\mu_0 = -k'^2 k'' E_0^2 e^{-2k''z}/\omega^2\mu_0 \end{aligned} \tag{24}$$

(минус объясняется тем, что получена ковариантная компонента, а метрический коэффициент $g^{zz} = -1$). Справедливость этого результата можно проверить, вычислив производную плотности потока импульса $-\partial_z T_z^z$. Последовательно получается

$$\begin{aligned} T_z^z &= \Re\{-\overline{F_{zx}}F^{zx} + \overline{F_{zx}}F^{zx}/2 + \overline{F_{tx}}F^{tx}/2\}/2 = \Re\{-\overline{F_{zx}}F^{zx} + \overline{F_{tx}}F^{tx}\}/4 \\ &= -\Re\{\overline{\breve{k}}\breve{k} + \breve{k}^2\}E_0^2 e^{-2k''z}/4\omega^2\mu_0 = -k'^2 E_0^2 e^{-2k''z}/2\omega^2\mu_0 \end{aligned} \quad \ldots\ldots..(25)$$

$$-\partial_z T_z^z = \partial_z(k'^2 E_0^2 e^{-2k''z})/2\omega^2\mu_0 = -k'^2 k'' E_0^2 e^{-2k''z}/\omega^2\mu_0\,. \quad (26)$$

Результаты (26) и (24) совпадают.

[1] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц, Теория поля (М.: Наука, 1973)

Lorentz force in the absence of charges and currents

R I Khrapko

Physics Department, Moscow Aviation Institute, Moscow 125993, Russia

The well-known expression of the Lorentz force is supplemented with a term describing the force acting on matter in the absence of charges and currents