

## Энергия поляризации диэлектрика

Р.И. Храпко

*Критикуется представление о квазиупругих диполях диэлектрика. Показано, что при поляризации диэлектрика энергия не затрачивается на раздвигание зарядов диполей. Электрическая энергия в диэлектрике превышает электрическую энергию в вакууме при том же макроскопическом электрическом поле из-за неоднородности электрического поля в диэлектрике. Использована модель проводящих слоёв в диэлектрике.*

### 1. Введение

Теория поляризации диэлектриков содержит, на наш взгляд, несколько дискуссионных моментов. Например, как хорошо известно, электрическая энергия конденсатора увеличивается в  $\epsilon$  раз, когда конденсатор заполняется диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  при фиксированной напряженности электрического поля  $E$ . Другими словами, если мы имеем два одинаковых конденсатора с одинаковым макроскопическим электрическим полем  $E$ , но один из них заполнен диэлектриком, а другой – нет, то энергия заполненного конденсатора будет больше, чем энергия не заполненного. Возникает вопрос, в каком виде содержится эта добавочная энергия в диэлектрике? Является ли она по-прежнему энергией электрического поля, или она имеет другую природу? Мы просмотрели дюжину монографий и учебников [1 – 12], однако только в двух [11, 12] нашли ответ на этот вопрос, который сводится к следующему. Дополнительная энергия в диэлектрике затрачивается на вытягивание атомов или молекул при их поляризации, поскольку атом представляется парой зарядов разного знака, которые как бы связаны пружинкой. Авторы называют эту энергию «энергией пружинки»<sup>1</sup>,  $kx^2/2$ . Мы внимательно изучим идею авторов и покажем ее ошибочность. В действительности «энергия пружинки» равна нулю, а избыток энергии заполненного диэлектриком конденсатора возникает из-за неоднородности электрического поля внутри диэлектрика и квадратичной зависимости энергии от напряженности поля.

### 2. Энергия поляризации молекул равна нулю

Мы подсчитаем здесь энергию поляризации молекул или атомов, но, во-первых, отметим, что возникающий при поляризации диполь нельзя рассматривать как пару точечных зарядов  $\pm q$ , поскольку кулоновская сила  $q^2/(4\pi\epsilon_0 r^2)$  их взаимного притяжения сингулярна при  $r = 0$ . Примем поэтому, что атомы диэлектрика имеют положительно заряженное ядро, окруженное отрицательными электронами как это изображено на рисунке 1 из [6] или рисунке 2 из [8]. В электрическом поле ядро притягивается в одну сторону, а электроны в другую. В этом и заключается поляризация. Орбиты или плотности вероятности электронов несколько искажаются; центр тяжести отрицательных зарядов смещается и не совпадает с положительным зарядом ядра. В результате, подобная нейтральная конфигурация в первом приближении эквивалентна маленькому диполю. Покажем, что энергия такого атома не изменяется в процессе его поляризации (см. также [13]). Однако вначале нам важно исправить некоторую неточность модели, представленной на рисунках 1 и 2.

На наш взгляд нет причин для растяжения электронного облака при поляризации атома. Изображенное на рисунках растяжение облака было бы возможно в неоднородном поле. Так приливные гравитационные силы растягивают тело при, скажем, падении его в черную дыру. Однородное

---

<sup>1</sup> Spring energy [12].

электрическое поле просто смещает электронное облако относительно положительного ядра без существенного изменения его формы. Точный расчет волновой функции электрона в атоме при наличии внешнего поля выходит за рамки настоящей статьи. Однако некоторые доводы против растяжения облака приведены в Приложении на основании решения уравнения Шредингера в параболических координатах при расчете эффекта Штарка [14].



Рис. 1

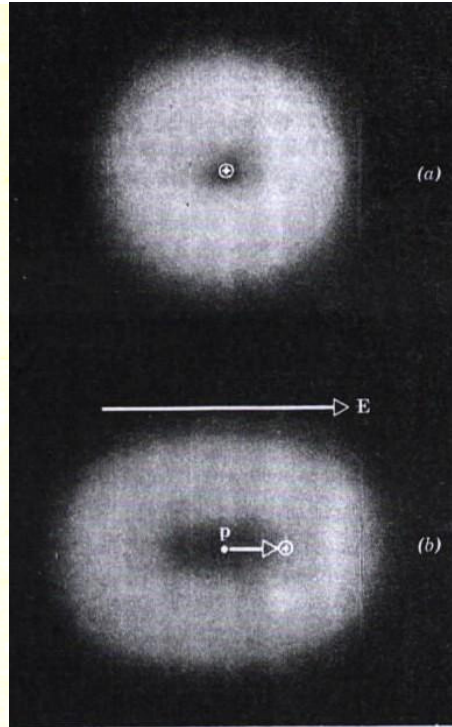


Fig. 29-12 (a) An atom, showing the nucleus and the electron cloud. The center of negative charge coincides with the center of positive charge, that is, with the nucleus. (b) If an external field  $E$  is applied, the electron cloud is distorted so that the center of negative charge, marked by the dot, and the center of positive charge no longer coincide. An electric dipole appears.

Рис. 2.



Рис. 3.

При поляризации атома происходит смещение электронного облака

Смещение электронного облака при поляризации атома, не сопровождающееся его растяжением, схематически показано на рисунке 3.

Хотелось бы обратить внимание на еще одну неточность рисунка 2. Дело в том, что темное пятно в центре означает малую вероятность для электрона находиться вблизи ядра, тогда как в действительности эта вероятность как раз наибольшая вблизи ядра для невозбужденного состояния атома.

Мы приступим теперь к расчету энергии поляризации атома, причем для простоты представим, что атом имеет плоскую симметрию, то есть область между плоскими границами атома неизменной толщиной  $l$  занята отрицательными зарядами с плотностью  $-ρ$ ,  $ρ > 0$ , а положительный заряд плотностью

$\sigma = \rho l$  расположен между ними на положительно заряженной плоскости (Рис. 4). Зависимость напряженности электрического поля  $E$  и потенциала  $\phi$  от координаты в такой конфигурации представлена на том же рисунке.

В отсутствие внешнего электрического поля будут справедливы соотношения (2.1), (2.2)



Рис. 4. Модель плоского атома

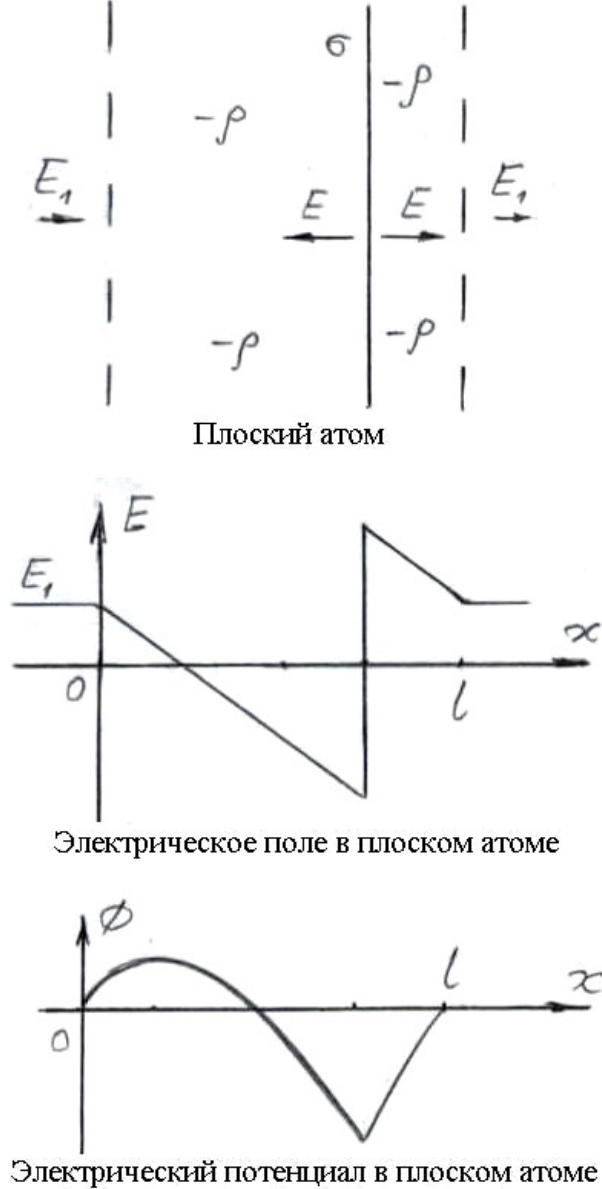


Рис. 5. Модель плоского атома во внешнем электрическом поле

$$E = -\frac{\sigma x}{\epsilon_0 l} \text{ при } 0 < x < \frac{l}{2}, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \text{ при } \frac{l}{2} < x < l. \quad (2.1)$$

$$\phi(x) = \int_x^0 E dx, \quad \phi(0) = \phi(l) = 0. \quad (2.2)$$

Электрическая энергия единицы площади атома может быть легко вычислена:

$$w = \int_0^l \epsilon_0 E^2 dx / 2 = \sigma^2 l / 24 \epsilon_0. \quad (2.3)$$

Если такой атом помещается во внешнее электрическое поле  $E_1$ , положительно заряженная плоскость смещается на расстояние  $\epsilon_0 E_1 l / \sigma$ , как показано на рисунке 5. Там же представлена напряженность результирующего поля и электрический потенциал.

$$E = E_1 - \sigma x / \epsilon_0 l \text{ при } 0 < x < l/2 + \epsilon_0 E_1 l / \sigma, \quad E = E_1 + \sigma(1 - x/l) / \epsilon_0 \text{ при } l/2 + \epsilon_0 E_1 l / \sigma < x < l. \quad (2.4)$$

Интеграл (2.3) для напряженности поля (2.4) дает результат (2.3) не зависимо от величины внешнего поля  $E_1$ . Таким образом, энергия, потраченная на поляризацию молекул равна нулю.

Равенство нулю «энергии пружинок», то есть энергии поляризации, можно подтвердить на примере другой модели атома. Представим себе, что атом состоит из положительной и отрицательной субстанций, наложенных друг на друга. В этом случае исходное внутриатомное электрическое поле и электрическая энергия равны нулю. При наложении внешнего поля  $E_1$  эти субстанции смещаются друг относительно друга, достигая нового положения равновесия, при котором на границе атома возникают поверхностные заряды, а напряженность поля и энергия между площадками остаются равными нулю (Рис. 6).

Р. Фейнман [6] указал весьма простую модель диэлектрика, предположив, что диэлектрики содержат маленькие проводящие шарики, изолированные друг от друга (Рис. 7), или внутри материала имеется множество мелких проводящих слоев. Эта модель весьма адекватна: если

между границами атома заключен проводник, то, очевидно, поле внутри него и его энергия остаются неизменными при



Рис. 6. Поляризация атома, состоящего из положительной и отрицательной субстанций

Фиг. 10.3. Модель диэлектрика; маленькие проводящие шарики, вставленные внутрь идеального изолятора.

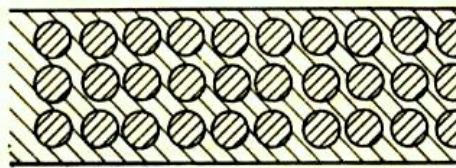


Рис. 7.

поляризации, как в нашей модели.

В заключение этого раздела рассмотрим атом, в котором заряды смещены как на рисунке 5, однако внешнее поле отсутствует. Это означает, что атом возбужден. Такая ситуация изображена на рисунке 8. Положительно заряженная плоскость смещена на расстояние  $\xi$  от центра. Энергия такого атома не равна нулю. Действительно, электрическое поле атома на рисунке 8 равно

$$\begin{aligned} E &= -\rho x \text{ если } 0 < x < (l/2 + \xi); \\ E &= \sigma - \rho x \text{ если } (l/2 + \xi) < x < l. \end{aligned} \quad (2.5)$$

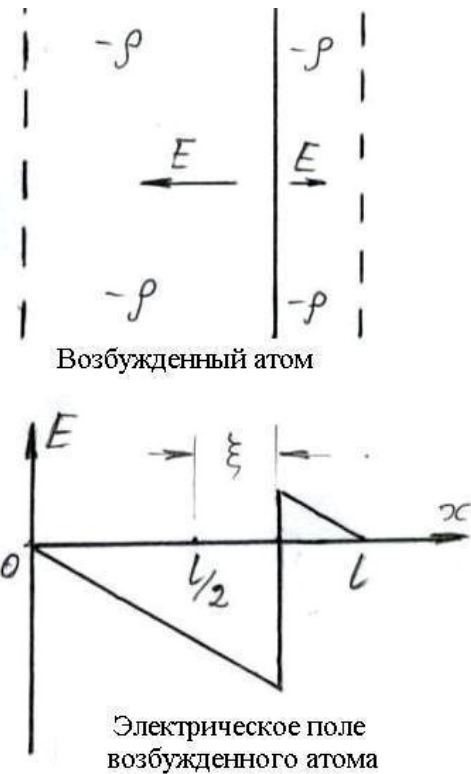


Рис. 8. Модель возбужденного атома. Внешнее электрическое поле отсутствует

Подставляя (2.5) в (2.3), получаем

$$W = \sigma^2 l / 24 + \rho \sigma \xi^2 / 2 \quad (2.6)$$

Такой атом имеет "энергию пружинки",  $\rho \sigma \xi^2 / 2$ , потому что он возбужден, а не поляризован.

### 3. Энергия пропорциональна квадрату напряженности поля

Так называемое макроскопическое поле  $E$  в диэлектрике является усреднением действительного электрического поля  $E_1$ , существующего в диэлектрике. Поле  $E_1$  существенно изменяется на расстояниях порядка атомных размеров, а усреднение заключается в выполнении равенства

$$\int E_1 dx = \int E dx, \quad (3.1)$$

которое обеспечивает правильную разность потенциалов на обкладках конденсатора. Ввиду того, что электрическая энергия пропорциональна квадрату напряженности поля, очевидно, что реальная энергия  $W_1$  больше, чем фиктивное выражение  $W$ :

$$W_1 = \int \epsilon_0 E_1^2 dV / 2 > W = \int \epsilon_0 E^2 dV / 2 \quad (3.2)$$

В этом заключается причина увеличения энергии конденсатора при заполнении его диэлектриком. Рассмотрим соотношение (3.2) детальнее, используя для простоты модель Фейнмана, согласно которой внутри материала имеются проводящие слои толщиной  $l$ ,

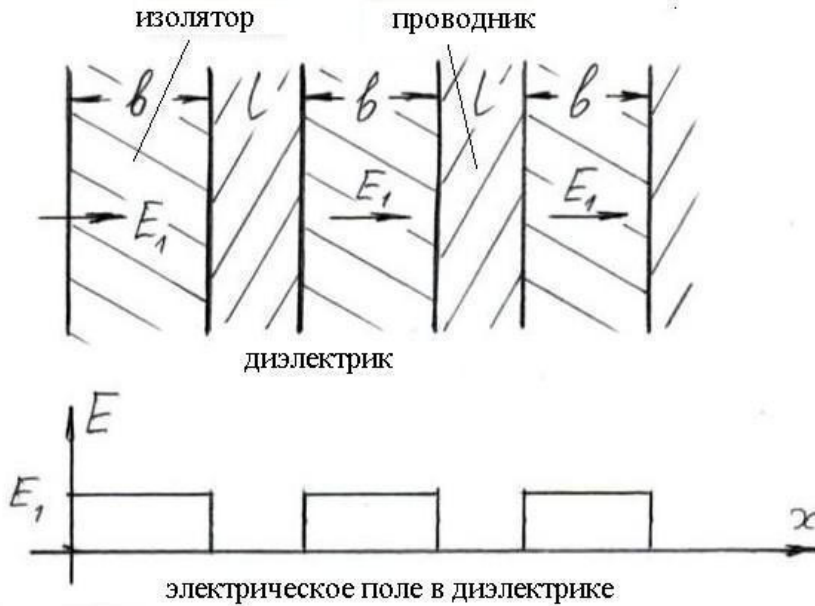


Рис. 9. Слоистый диэлектрик в электрическом поле

разделенные изолирующими слоями толщиной  $b$ . Эта модель представлена на рисунке 9, где  $E_1$  есть внешнее по отношению к диэлектрику поле, создаваемое пластинами конденсатора. Оно проникает в материал до первого проводящего слоя. Уравнение (3.1) для такой модели дает следующее значение диэлектрической проницаемости  $\epsilon$ :

$$E_1 b = E(b+l), \quad E_1 = \frac{b+l}{b} E, \quad \epsilon = \frac{b+l}{b}, \quad E_1 = \epsilon E, \quad (3.3)$$

а уравнение (3.2) дает значение плотности энергии, то есть временную компоненту тензора энергии-импульса Максвелла

$$w_1 = \frac{W_1}{V} = T_e^{00} = \frac{1}{2(b+l)} \int_0^{b+l} \epsilon_0 E_1^2 dx = \frac{\epsilon_0 E_1^2 b}{2(b+l)} = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2\epsilon} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2}. \quad (3.4)$$

Так решается проблема энергии поляризованного диэлектрика.

#### 4. Приложение

Мы приведем здесь доводы против растяжения электронного облака атома при поляризации. Параболические координаты  $\xi, \eta, \varphi$  связаны с декартовыми координатами соотношениями [14]

$$\begin{aligned} x = \sqrt{\xi\eta} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{\xi\eta} \sin \varphi, \quad z = (\xi - \eta)/2, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (\xi + \eta)/2 \\ \xi = r + z, \quad \eta = r - z, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Координатные линии параболических координат в плоскости  $x, z$  или  $y, z$  представлены, например, в [15]. Важно отметить, что на положительной полуоси  $z$ , то есть там, где  $z = r$ , справедливо  $\eta = 0, \xi = 2z$ , а на отрицательной полуоси  $z$ , то есть там, где  $z = -r$ , справедливо  $\xi = 0, \eta = -2z > 0$ .

Для основного состояния атома водорода решение уравнения Шредингера [14]

$$(\Delta - e^2 + \frac{2}{r} - 2Ez)\psi = 0 \quad (4.2)$$

ищется в виде  $\psi = \frac{\chi_1(\xi)\chi_2(\eta)}{\sqrt{\xi\eta}}$ . Это позволяет разделить переменные:

$$\frac{d^2\chi_1}{d\xi^2} = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{\beta_1}{\xi} - \frac{1}{4\xi^2} + \frac{E\xi}{4}\right)\chi_1, \quad \frac{d^2\chi_2}{d\eta^2} = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{\beta_2}{\eta} - \frac{1}{4\eta^2} - \frac{E\eta}{4}\right)\chi_2, \quad \beta_1 + \beta_2 = 1. \quad (4.3)$$

Здесь обозначение  $e^2$  используется вместо энергии электрона  $E$ ,  $e^2 = -2E$ , а  $E$  есть напряженность электрического поля, направленного вдоль оси  $z$ . При отсутствии электрического поля,  $E = 0$ , эти уравнения очевидно имеют решения

$$\chi_{10} = \sqrt{\xi} \exp(-\xi/2), \quad \chi_{20} = \sqrt{\eta} \exp(-\eta/2), \quad e^2 = 1, \quad \beta_{10} = \beta_{20} = 1/2, \quad (4.4)$$

так что мы имеем  $\psi_0 = \exp(-r)$ , как и должно быть, однако мы обратим внимание на графики функций  $\chi_{10}$  и  $\chi_{20}$  вдоль оси  $z$  и на изменение этих графиков при появлении электрического поля  $E$ . Эти графики изображены на рисунке 10.

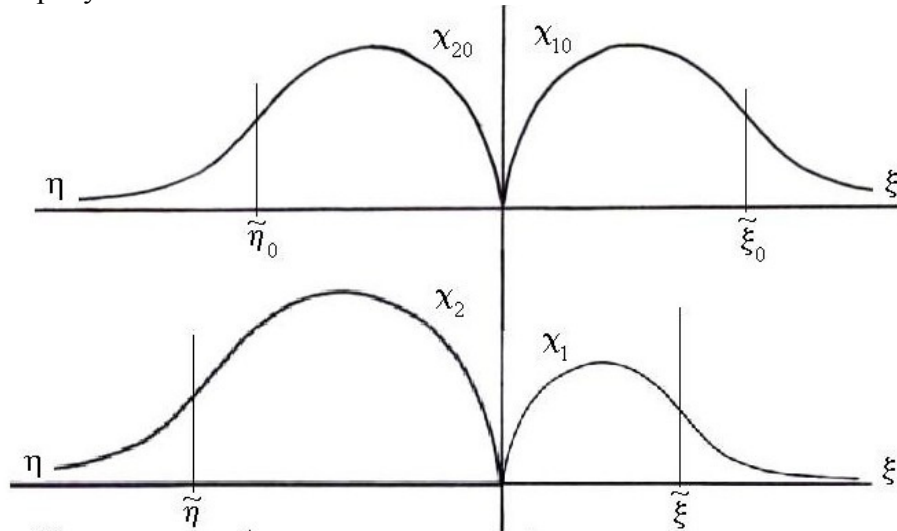


Рис. 10. Показано, как изменяется волновая функция электрона при появлении электрического поля: сдвиг электронного облака при  $z > 0$  равен сдвигу при  $z < 0$

Точки перегиба графиков,  $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}$ , на основании (4.3), удовлетворяют уравнениям

$$F_1(\tilde{\xi}, E) = 0, \quad F_2(\tilde{\eta}, E) = 0, \quad (4.5)$$

где

$$F_1(\xi, E) = \frac{e^2}{4} - \frac{\beta_1}{\xi} - \frac{1}{4\xi^2} + \frac{E\xi}{4}, \quad F_2(\eta, E) = \frac{e^2}{4} - \frac{\beta_2}{\eta} - \frac{1}{4\eta^2} - \frac{E\eta}{4}. \quad (4.6)$$

При  $E = 0$  уравнения (4.5) и (4.4) дают начальные координаты точек перегиба:  $\xi_0 = \eta_0 \cong 2.4$ . Вычислим теперь, как смещаются точки перегиба  $\xi$  и  $\eta$  при появлении электрического поля. Мы учтем при этом отсутствие линейного эффекта Штарка для основного состояния атома,  $de^2/dE = 0$ , и зависимость параметров разделения переменных  $\beta$  от  $E$ :  $\beta_1 = 1/2 + E/2$ ,  $\beta_2 = 1/2 - E/2$ . Подсчитаем производные  $d\tilde{\xi}/dE$  и  $d\tilde{\eta}/dE$  при  $E = 0$ :

$$\frac{d\tilde{\xi}}{dE} = - \frac{dF_1/dE}{\partial F_1/\partial \xi} = \frac{1}{2\tilde{\xi}_0} - \frac{\tilde{\xi}_0}{4} \quad \frac{d\tilde{\eta}}{dE} = - \frac{dF_2/dE}{\partial F_2/\partial \eta} = -\frac{1}{2\tilde{\eta}_0} + \frac{\tilde{\eta}_0}{4} \quad (4.7)$$

Видно, что смещения точек перегиба графиков  $\chi_1(\xi)$  и  $\chi_2(\eta)$  отличаются друг от друга только знаком, а потому уширение электронного облака при поляризации атома не происходит.

### Список литературы

1. Rohrlich F *Classical Charged Particles* (Addison-Wesley, Mass. 1965)
2. Stratton J A *Electromagnetic Theory* (N. Y., London, 1941)
3. Jackson J D *Classical Electrodynamics*, (John Wiley, 1999).
4. Landau L D, Lifshitz E M *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, N. Y. 1975).
5. Abraham M, Becker R *The Classical Theory of Electricity and Magnetism* (Hafner, N. Y.)
6. Feynman R P, Leighton R B, Sands M *The Feynman Lectures on Physics* (Addison-Wesley, London, 1965).
7. Ohanian H C *Physics* (W. W. Norton, N. Y., 1985) 1012 p.
8. Halliday D, Resnick R *Physics*. Part 2 (N.Y. Wiley, 1962)
9. Савельев И В *Курс общей физики*, том 2. – М.: Наука, 1970.- 431с.
10. Сивухин Д В *Общий курс физики*, том III, часть 1. – М.: Наука, 1996.- 320с.
11. Тамм И Е *Основы теории электричества*. – М.: Физматлит, 2003.- 616с.
12. Griffiths D J *Introduction to Electrodynamics*. - N.J.: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.- 684p.
13. Р.И. Храпко Р И [http://www.mai.ru/projects/mai\\_works/articles/num23/article6/author.htm](http://www.mai.ru/projects/mai_works/articles/num23/article6/author.htm) (2006)
14. Ландау Л, Лифшиц Е *Квантовая механика*. – М.: ОГИЗ, 1948.- 567с. § 37, § 73.
15. Корн Г, Корн Т *Справочник по математике*. – М.: Наука, 1984, 832с.

### Polarization energy of a dielectric

#### R. I. Khrapko

Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Russia

[khrapko\\_ri@hotmail.com](mailto:khrapko_ri@hotmail.com)

The concept of quasi-elastic dipoles in a dielectric is criticized. It is shown that energy is not needed for a polarization of atoms in a dielectric. Electric energy of a dielectric exceeds electric energy of an empty space with the same macroscopic electric field because of a non-uniformity of the real electric field in the dielectric. An idea that inside a dielectric there are many little sheets of conductive material is used.

## Дополнение

**Российская академия наук**  
**Редакция журнала «Успехи физических наук»**  
119991 Москва, Ленинский проспект д. 53  
Тел. (499) 132-62-65. Тел./Факс. (499) 190-42-44, (499) 132-63-48.  
E-mail: [ufn@ufn.ru](mailto:ufn@ufn.ru)

---

**№ 6579/1**  
**12 марта 2008 г.**

**Р.И. Храпко**

Уважаемый Радий Игоревич!

Ваша статья «Энергия поляризации диэлектрика» была рассмотрена вместе с поступившим на Вашу статью отзывом независимого рецензента.

Учитывая критический характер отзыва, было принято решение отказать от публикации Вашей статьи в журнале УФН.

Направляем Вам отзыв на Вашу статью.

От имени и по поручению редколлегии  
журнала «Успехи физических наук»  
зам. главного редактора  
член-корреспондент РАН, профессор



О.В. Руденко

**ОТЗЫВ**

На статью, посланную для опубликования в журнале УФН под названием «ЭНЕРГИЯ ПОЛЯРИЗАЦИИ ДИЭЛЕКТРИКА» автора Храпко Р.И.

Автор рассматривает энергию диэлектрика, помещённого во внешнее электрическое поле для нескольких простых плоских моделей. Автора интересует физический смысл ответа на вопрос – почему энергия конденсатора, заполненного диэлектриком больше, чем незаполненного. Считается, что это происходит по причине поляризации диэлектрика. Можно произвести расчёт энергии для случая линейной связи между индукцией и полем и доказать, что энергия в заполненном конденсаторе действительно в  $\epsilon$  раз больше чем в незаполненном, что и даётся в цитированной литературе. Для этого вывода не нужны никакие модели, так как они никакого другого результата не дают.

В подавляющем большинстве учебников, цитированных автором, этот вопрос или вообще не ставится или же на него даются ответы, по мнению Р.И. Храпко, неправильные. В последние два он зачислил Тамма и Гриффитса. Эти авторы не считают данный вопрос существенным, по этой же причине все прочие авторы 10 учебников по электродинамике просто не касаются данного вопроса.

По нашему мнению эти авторы правы и данный вопрос не является существенным, так что рецензируемая статья беспредметна.

Не существует опыта, в котором бы указанные две составляющие энергии в диэлектрике проявляли бы себя по отдельности. МЫ НЕ МОЖЕМ РЕКОМЕНДОВАТЬ ДАННУЮ СТАТЬЮ К ПУБЛИКАЦИИ.

**Возражение на рецензию статьи "Энергия поляризации диэлектрика"**

По мнению рецензента, авторы 10 учебников знают, где именно локализована энергия поляризации диэлектрика, но не сообщают этого читателям, потому что считают данный простой вопрос несущественным. Однако грубая ошибка тех авторов, которые решились подробно осветить данный простой вопрос в учебниках, означает, что в действительности никто из авторов не знает, где на самом деле локализована энергия поляризации диэлектрика и что в результате читатели вместе с рецензентом и членами редколлегии оказались обманутыми в данном простом вопросе. Ввиду этого редколлегия должна игнорировать отзыв рецензента и опубликовать статью.