# СПИН КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

**ХРАПКО Р.И.**[1]
[1] Московский авиационный институт, 125993, Москва
Тип: статья в журнале - научная статья Язык: русский

Номер: 10 Год: 2002 Страницы: 40-48

Цит. в РИНЦ®: 7

УДК: 539.12

ЖУРНАЛ:

ВЕСТНИК РОССИЙСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ДРУЖБЫ НАРОДОВ. СЕРИЯ: МАТЕМАТИКА, ИНФОРМАТИКА, ФИЗИКА
Издательство: Российский университет дружбы народов (Москва)

АННОТАЦИЯ:

Истинный тензор энергии-импульса однозначен и не допускает добавление какого-либо члена. Истинным тензором энергии-импульса электродинамики является тензор Максвелла-Минковского. Этот тензор не может быть получен с помощью лагранжевого формализма. Вводится тензор спина электродинамики, равный нулю в теории Максвелла, так что пондеромоторное действие электромагнитного поля состоит из силы, определяемой максвелловским тензором напряжений, и момента силы, определяемого тензора крутильных напряжений. Этот тензор является пространственной частью введенного тензора спина. Показано, что луч простой круговой поляризации несет и спиновый и орбитальный момент импульса. Так что момент импульса такого луча удваивается по сравнению с теорией Максвелла. Впервые рассмотрена теория опыта Бета.

ОПИСАНИЕ НА АНГЛИЙСКОМ ЯЗЫКЕ:

Spin of the Classical Electrodynamics

Khrapko R.I.[1]

[1] Moscow Aviation Institute, 125993, Moscow, Russia

A true energy-momentum tensor is unique and does not admit an addition of a term. The electrodynamics' true energy-momentum tensor is the Maxwell-Minkowski tensor. It cannot be derived by the Lagrange formalism.
An electrodynamics spin tensor is introduced. This tensor is zero in the Maxwell electrodynamics. So, ponderomotive acting on a surface element consists of both, the force from the Maxwell stress tensor and a torque from the torque tensor, which is a space part of the spin tensor. It is shown that a beam of simple circularly polarization carries spin and orbital angular momentums. So, the total angular momentum of the beam is doubled in comparison to the Maxwell theory. A theory of the Beth's experiment is presented for the first time.

# Спин классической электродинамики

Р. И. Храпко
*Московский авиационный институт, 125993, Москва, Россия*

Истинный тензор энергии-импульса однозначен и не допускает добавление какого-либо члена. Истинным тензором энергии-импульса электродинамики является тензор Максвелла-Минковского. Этот тензор не может быть получен с помощью лагранжевого формализма.

Вводится тензор спина электродинамики, равный нулю в теории Максвелла, так что пондеромоторное действие электромагнитного поля состоит из силы, определяемой максвелловским тензором напряжений, и момента силы, определяемого тензора крутильных напряжений. Этот тензор является пространственной частью введенного тензора спина. Показано, что луч простой круговой поляризации несет и спиновый и орбитальный момент импульса. Так что момент импульса такого луча удваивается по сравнению с теорией Максвелла. Впервые рассмотрена теория опыта Бета

## 1. Очерк стандартной электродинамики

Электромагнетизм представляет собой классическую теорию вещественного 4-векторного поля ковекторного потенциала $A_\mu$. ($\mu,\ \alpha, \ldots = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, или $= t,\ x,\ y,\ z$). Этот 4-вектор состоит из электрического потенциала и 3-вектора магнитного потенциала,

$$A_\mu = \{\phi,\ -A_i\}, \quad A^\mu = \{\phi,\ A^i\}.$$

($i, k, \ldots = 1, 2, 3$, или $= x, y, z$). Мы используем метрический тензор $g^{\alpha\mu} = \{g^{00} = 1,\ g^{ij} = -\delta^{ij}\}$. Скорость света, $c = 1$.

Взаимодействие рассматриваемого поля с частицей, имеющей массу $m$ и электрический заряд $e$, подчиняется принципу наименьшего действия с интегралом [1]:

$$\mathcal{A} = -\int (mds + eA_\mu dx^\mu).$$

$\delta\mathcal{A} = 0$ дает

$$m\frac{du^\nu}{ds}g_{\mu\nu} = eF_{\mu\nu}u^\nu, \quad u^\nu = \frac{dx^\nu}{ds},$$

$$F_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Ковариантный антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$, или контравариантный тензор $F^{\alpha\beta} = F_{\mu\nu}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}$ называется тензором электромагнитного поля. По определению,

$$\partial_{[\sigma}F_{\mu\nu]} = 0.$$

Это тождество называется первой парой уравнений Максвелла.

$F_{\mu\nu}$ состоит из напряженности электрического поля и магнитной индукции; $F^{\alpha\beta}$ состоит из электрической индукции и напряженности магнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \{F_{i0} = -E_i,\ F_{ij} = -B_{ij}\},$$

$$F^{\alpha\beta} = \{F^{i0} = D^i,\ F^{ij} = -H^{ij}\}$$

(можно считать $E$ и $D$ синонимами так же, как $B$ и $H$).

Если вместо массы частицы рассматривается плотности массы, а вместо заряда рассматривается плотность заряда $\rho$, то вводится плотность 4-силы $f_\mu = F_{\mu\nu}j^\nu$, где 4-векторная плотность электрического тока $j^\nu$ состоит из плотности заряда и 3-векторной плотности электрического тока: $j^\nu = \{j^0 = \rho,\ j^i\}$ Плотность 4-силы состоит из плотности мощности и плотности силы Лоренца,

$$f_\mu = j^\nu F_{\mu\nu} =$$

$$= \{f_0 = j^k E_k,\ f_i = -\rho E_i - j^k B_{ik}\},$$
$$f^k \delta_{ki} = \rho E_i + j^k B_{ik}$$

(мы используем систему единиц Хевисайда).

Сила $f_\mu = F_{\mu\nu} j^\nu$ действует на ток со стороны поля. Будем говорить, что (согласно третьему закону Ньютона) сила $-f_\mu = -F_{\mu\nu} j^\nu$ действует на поле со стороны тока.

Вторая пара уравнений Максвелла получается из лагранжиана $\mathcal{L}$ с помощью стандартного лагранжевого формализма, который приводит к уравнениям Эйлера-Лагранжа,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = 0.$$

Обычно рассматриваются, по меньшей мере, три различных полевых лагранжиана:
простой лагранжиан векторного поля,

$$\underset{v}{\mathcal{L}} = -\partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu / 2,$$

лагранжиан Дирака - Фока - Подольского [2],

$$\underset{D}{\mathcal{L}} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4 - \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu / 2,$$

канонический лагранжиан,

$$\underset{c}{\mathcal{L}} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4,$$

и лагранжиан взаимодействия,

$$\underset{j}{\mathcal{L}} = -A_\mu j^\mu.$$

$\underset{v}{\mathcal{L}}$ отличается от $\underset{D}{\mathcal{L}}$ на дивергенцию,

$$\underset{v}{\mathcal{L}} - \underset{D}{\mathcal{L}} = \partial_\mu (A^{[\nu} \partial_\nu A^{\mu]}).$$

Поэтому лагранжианы $\underset{v}{\mathcal{L}} + \underset{j}{\mathcal{L}}$ и $\underset{D}{\mathcal{L}} + \underset{j}{\mathcal{L}}$ дают одно и то же уравнение поля,

$$j^\mu = \partial^\nu_\nu A^\mu.$$

Однако, это неправильное уравнение. Оно не представляет собой вторую пару уравнений Максвелла. Только использование в сумме лагранжианов канонического лагранжиана,

$$\underset{c}{\mathcal{L}} + \underset{j}{\mathcal{L}} = -F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}/4 - A_\nu j^\nu, \qquad (1)$$

дает вторую пару уравнений Максвелла.

$$j^\mu = -\partial_\nu F^{\mu\nu}.$$

Вследствие однородности и изотропии пространства-времени, то есть при отсутствии электрических токов, согласно теореме Нетер, полевые лагранжианы дают пары “сохраняющихся” тензоров (более точно, тензорных плотностей), именно, лагранжевые тензоры энергии-импульса и лагранжевые тензоры спина, по формулам [3, 4, 5]:

$$\underset{\mathcal{L}}{T}{}^{\mu\alpha} = \partial^\mu A_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\sigma)} - g^{\mu\alpha} \mathcal{L},$$

$$\underset{\mathcal{L}}{\Upsilon}{}^{\mu\nu\alpha} = -2A^{[\mu} \delta^{\nu]}_\sigma \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\sigma)}.$$

Лагранжианы $v$-, $D$- и $c$- дают $v$-, $D$- и $c$- лагранжевые тензоры:

$$\underset{v}{T}{}^{\mu\alpha} = -\partial^\mu A_\sigma \partial^\alpha A^\sigma + g^{\mu\alpha} \partial_\rho A_\sigma \partial^\rho A^\sigma,$$

$$\underset{v}{\Upsilon}{}^{\mu\nu\alpha} = 2A^{[\mu} \partial^{|\alpha|} A^{\nu]},$$

$$\underset{D}{T}{}^{\mu\alpha} = -\partial^\mu A_\sigma F^{\alpha\sigma} + g^{\mu\alpha} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho}/4 -$$
$$-\partial^\mu A^\alpha \partial_\sigma A^\sigma + g^{\mu\alpha} \partial_\rho A^\rho \partial_\sigma A^\sigma / 2,$$

$$\underset{D}{\Upsilon}{}^{\mu\nu\alpha} = -2A^{[\mu} F^{\nu]\alpha} + 2A^{[\mu} g^{\nu]\alpha} \partial_\sigma A^\sigma,$$

$$\underset{c}{T}{}^{\mu\alpha} = -\partial^\mu A_\sigma F^{\alpha\sigma} + g^{\mu\alpha} F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho}/4,$$

$$\underset{c}{\Upsilon}{}^{\mu\nu\alpha} = -2A^{[\mu} F^{\nu]\alpha}.$$

## 2. Истинный тензор энергии-импульса

Плотность 4-силы $-f_\mu = -j^\nu F_{\mu\nu}$, которая действует на поле со стороны токов, является источником энергии и импульса поля. Ее можно записать как дивергенцию некоторого тензора $\theta^\alpha_\mu$ (более точно, тензорной плотности),

$$-f_\mu = -F_{\mu\nu} j^\nu = \partial_\alpha \theta^\alpha_\mu. \qquad (2)$$

Тензор $\theta_\mu^\alpha$, удовлетворяющий этому равенству, очевидно, не однозначен. К нему можно добавить бездивергентный члена типа

$$\partial_\beta \psi_\mu^{\alpha\beta}, \quad \psi_\mu^{\alpha\beta} = -\psi_\mu^{\beta\alpha}. \qquad (3)$$

Тем не менее, ни один из лагранжевых тензоров энергии-импульса не удовлетворяет равенству (2). Например,

$$\partial_\alpha \underset{v}{T}^{\mu\alpha} = -\partial^\mu A_\sigma (j^\sigma + \partial_\nu^\sigma A^\nu)$$

$$\partial_\alpha \underset{c}{T}^{\mu\alpha} = -\partial^\mu A_\nu j^\nu. \qquad (4)$$

Тензору $\theta_\mu^\alpha$ можно придать физический смысл и тем устранить его неоднозначность, если потребовать, чтобы этот тензор удовлетворял нижеследующим локальным формулам. В этом случае он будет называться (истинным) тензором энергии-импульса электромагнитного поля и будет обозначаться $T_\mu^\alpha$.

Итак, пусть $dV_0$ - пространственно подобный элемент объема. Тогда

$$d\mathcal{E} = T_0^0 dV_0 \quad \text{и} \quad dP_j = T_j^0 dV_0 \qquad (5)$$

являются массой-энергией и импульсом, которые содержатся в $dV_0$.

Если $dV_\alpha$ - времени подобный элемент объема, то есть $dV_\alpha$ содержит какую-нибудь ось времени, например, $dV_\alpha = \{dV_0 = 0,\ dV_i = da_i dt\}$, где $da_i$ - двумерный элемент поверхности, то

$$d\mathcal{P} = T_0^i da_i \quad \text{и} \quad d\mathcal{F}_j = T_j^i da_i \qquad (6)$$

есть мощность и сила, которые ассоциируются с элементом $da_i$.

Можно представить эти формулы в четырехмерном виде

$$dP_\mu = T_\mu^\alpha dV_\alpha, \qquad (7)$$

где $dP_\mu$ - 4-импульс, который получает инфинитезимальный элемент $dV_\alpha$, локально ограничивающий поле.

Максвелл и Минковский нашли тензор $T_\mu^\alpha$ как обобщение экспериментальных данных:

$$T_\mu^\alpha = -F_{\mu\nu} F^{\alpha\nu} + \delta_\mu^\alpha F_{\sigma\nu} F^{\sigma\nu}/4. \qquad (8)$$

Естественно, тензор (8) удовлетворяет равенству (2).

Контравариантный тензор Максвелла-Минковского симметричен,

$$T_\mu^\alpha g^{\mu\beta} = T^{\beta\alpha} = T^{(\beta\alpha)}, \quad T^{[\beta\alpha]} = 0.$$

Интегрирование формул (7) по замкнутой гиперповерхности $\partial\Omega$, ограничивающей 4-объем $\Omega$, дает 4-импульс, который получает эта гиперповерхность от поля. Если гиперповерхность ограничивает полость внутри поля, внутри которой находится отрезок мировой трубки некоторого тела, то интеграл равен 4-импульсу, полученному этим телом.

$$P_\mu = \oint_{\partial\Omega} T_\mu^\alpha dV_\alpha.$$

Во всех случаях интегрирование производится по внешней, по отношению к полю, нормали.

Теорема Стокса позволяет преобразовать этот интеграл в интеграл от плотности той силы, которую поле получает от токов.

$$P_\mu = \oint_{\partial\Omega} T_\mu^\alpha dV_\alpha = \int_\Omega \partial_\alpha T_\mu^\alpha d\Omega =$$

$$= \int_\Omega (-j^\nu F_{\mu\nu}) d\Omega. = \int_\Omega (-f_\mu) d\Omega. \qquad (9).$$

Таким образом сила передается от токов через поле к телу.

Естественно, истинный тензор энергии-импульса (8), удовлетворяющий формулам (5) - (7), единственен. В частности, не допустимы никакие добавки типа (3) к тензору энергии-импульса, поскольку всякие добавки соответствуют локальному изменению поля, которое этот тензор локально описывает.

Больше того, добавление члена (3) к тензору энергии-импульса среды, кроме локального изменения, может привести к изменению полного 4-импульса системы, вопреки всеобщим заявлениям, даже в случае островной системы тел, например, в случае массивного шара. Дело в том, что островная система в пространстве-времени изображается бесконечной мировой трубкой. Поэтому, если тензор энергии-импульса такой системы представить в виде бездивергентного выражения (3), то величина $\psi_\mu^{\alpha\nu}$ недостаточно быстро спадает на пространственной бесконечности и при интегрировании по удаленной на бесконечность границе пространства дает, вопреки всеобщим заявлениям, не ноль, а массу этой самой системы [6, 7, 8], несмотря на отсутствие полей и частиц на бесконечности

Например, нетрудно выразить тензор энергии-импульса однородного шара радиуса $R$ без давления в виде $T^{\alpha\beta} = \partial_\gamma \psi^{\alpha\beta\gamma}$.

$$\psi^{00i} = -\psi^{0i0} = \epsilon x^i/3 \quad (r < R),$$

$$\psi^{00i} = -\psi^{0i0} = \epsilon R^3 x^i / 3r^3 \quad (r > R)$$

$$\text{дает} \quad T^{00} = \partial_i \psi^{00i} = \epsilon \quad (r < R),$$

$$T^{00} = \partial_i \psi^{00i} = 0 \quad (r > R).$$

## 3. Попытки вывода тензора Максвелла-Минковского. Ошибки Белинфанте, Розенфельда и Сопера

По-видимому, единственным теоретическим способом получения тензора Максвелла-Минковского (8) является вариация канонического лагранжиана

$$\underset{c}{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g}$$

по метрическому тензору в пространстве Минковского [1, Sec. 94]. Однако мы не будем рассматривать этот способ здесь. В рамках стандартного лагранжевого формализма канонический лагранжиан дает не тензор Максвелла-Минковского, а канонический тензор энергии-импульса [1, Sec. 33],

$$\underset{c}{T}{}_\mu^{\ \alpha} = -\partial_\mu A_\nu F^{\alpha\nu} + \delta_\mu^\alpha F_{\nu\sigma} F^{\nu\sigma}/4.$$

Этот тензор "сохраняется" в отсутствие токов, т.е.

$$\partial_\alpha \underset{c}{T}{}_\mu^{\ \alpha} = 0,$$

согласно теореме Нетер ввиду однородности пространства-времени. Однако этот тензор не имеет отношения к реальности. Он противоречит эксперименту [7]. Например, в однородном постоянном магнитном поле $B$, направленном по оси $x$,

$$A_y = Bz/2, \; A_z = -By/2,$$

$$F_{yz} = \partial_y A_z - \partial_z A_y = -B,$$

канонический тензор приводит к неправильному нулевому значению давления поля поперек силовых линий:

$$\underset{c}{T}{}_y^{\,y} = \underset{c}{T}{}_z^{\,z} = 0.$$

У канонического тензора неправильная дивергенция в присутствие токов (4), и он несимметричен. Чтобы превратить канонический тензор энергии-импульса в тензор Максвелла-Минковского, теоретики просто «рукой» добавляют к нему *ad hoc* член [1, Sec. 33] $\partial_\beta A_\mu F^{\alpha\beta}$. Этот член распадается на две части:

$$T_\mu^\alpha = \underset{c}{T}{}_\mu^{\ \alpha} + \partial_\beta A_\mu F^{\alpha\beta} =$$

$$= \underset{c}{T}{}_\mu^{\ \alpha} + \partial_\beta (A_\mu F^{\alpha\beta}) + A_\mu j^\alpha.$$

Вторая часть, $A_\mu j^\alpha$, исправляет дивергенцию канонического тензора. После этого первая часть, $\partial_\beta(A_\mu F^{\alpha\beta})$, симметрирует его, не меняя дивергенцию. Несомненно, это добавление не имеет никаких оснований, за исключением того, что приводит к заранее известному тензору Максвелла-Минковского. Добавка даже не имеет вид дивергенции. Поэтому мы должны осознать, что лагранжевый формализм не дает истинного тензора энергии-импульса.

Теоретики игнорируют вторую часть добавки. Они просто не видят ее. Однако Белинфанте и Розенфельд [9, 10], см. также [11], серьезно занимались первой частью. Они обратили внимание на то, что, при ее антисимметризации получается дивергенция канонического тензора спина со знаком минус:

$$2\partial_\beta (A^{[\mu} F^{\nu]\beta}) = -\partial_\beta \underset{c}{\Upsilon}{}^{\mu\nu\beta}. \qquad (10)$$

Мы используем этот факт в следующем разделе. Здесь же повторим, что добавление только первой части к каноническому тензору энергии-импульса приводит не к тензору Максвелла-Минковского, а дает то, что можно назвать тензором Белинфанте-Розенфельда:

$$\underset{BR}{T}{}^{\mu\alpha} = \underset{c}{T}{}^{\mu\alpha} + \partial_\beta(A^\mu F^{\alpha\beta}) = T^{\mu\alpha} - A^\mu j^\alpha.$$

Сторонники метода Белинфанте и Розенфельда, например [1, стр. 110], указывают, что этот тензор совпадает с тензором Максвелла-Минковского, $T^{\mu\alpha}$, при отсутствии токов. Это, конечно, верно. Но при таком условии нельзя применять равенство (2), $\partial_\alpha T^\alpha_\mu = -F_{\mu\nu}j^\nu$, к тензору Белинфанте-Розенфельда, $\underset{BR}{T}{}^{\mu\alpha}$, в общем случае. Для того, чтобы использовать равенство (2), необходимо прибавлять обе части к каноническому тензору. Однако в этом случае не следует утверждать, что для получения тензора Маквелла-Минковского прибавляется полная дивергенция к каноническому тензору энергии-импульса.

Попытка получить тензор Максвелла-Минковского стандартным лагранжевым формализмом при помощи добавки полной дивергенции Белинфанте-Розенфельда предпринята Сопером [12]. Этот автор использует для получения тензора энергии-импульса лагранжиан (1), который позволил получить вторую пару уравнений Максвелла и явно зависит от координат,

$$\underset{S}{\mathcal{L}} = \underset{c}{\mathcal{L}} + \underset{j}{\mathcal{L}} = -F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}/4 - j^\mu(x)A_\mu. \tag{8.3.2 - 4}$$

Автор думает, что его лагранжевый тензор энергии-импульса отличается от канонического тензора энергии-импульса как раз на величину $A^\mu j^\nu$. Он пишет:

$$\underset{S}{T}{}^{\mu\nu} = \partial^\mu A_\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\sigma)} - g^{\mu\nu}\mathcal{L} =$$

$$= -(\partial^\mu A_\sigma)F^{\nu\sigma} + g^{\mu\nu}F_{\sigma\beta}F^{\sigma\beta}/4 - A^\mu j^\nu. \tag{8.3.7 - 8}$$

Но Сопер допустил ошибку. В действительности его тензор энергии-импульса содержит свертку $A_\rho j^\rho$:

$$\underset{S}{T}{}^{\mu\nu} =$$

$$= -(\partial^\mu A_\sigma)F^{\nu\sigma} + g^{\mu\nu}F_{\sigma\beta}F^{\sigma\beta}/4 - g^{\mu\nu}A_\rho j^\rho.$$

Поэтому добавка Белинфанте-Розенфельда, $\partial_\nu(A^\mu F^{\alpha\nu})$, не превращает тензор Сопера в тензор Максвелла-Минковского, так же, как она не превращает в него и канонический тензор

## 4. Спиновый тензор электродинамики

Итак, лагранжевый формализм не дает истинный тензор энергии-импульса. Однако этот формализм дает более важную вещь. Формализм подает идею классического спина.

Согласно теореме Нетер, в случае изотропии пространства-времени (то есть при отсутствии токов), одновременно с каноническим тензором энергии-импульса, возникает канонический тензор спина

$$\underset{c}{\Upsilon}{}^{\mu\nu\alpha} = -2A^{[\mu}F^{\nu]\alpha}. \tag{11}$$

Существование тензора спина предполагает, что электромагнитное поле воздействует на свою границу не только через максвелловский тензор напряжений, $T^{ji}$ (6), но так же через тензор крутильных напряжений $\Upsilon^{jki}$ (более точно, это тензорные плотности). Тензор напряжений обеспечивает силу, действующую на элемент поверхности, а тензор крутильных напряжений определяет момент силы, действующий на этот элемент,

$$d\tau^{jk} = \Upsilon^{jki}da_i. \tag{12}$$

В пространстве Минковского имеем

$$dS^{\mu\nu} = \Upsilon^{\mu\nu\alpha}dV_\alpha. \tag{13}$$

Это означает, что если поле локально ограничено инфинитезимальным элементом $dV_\alpha$, то этот элемент получает инфинитезимальный спин $dS^{\mu\nu}$.

Поэтому полный момент 4-импульса, орбитальный + спиновый, получаемый элементом $dV_\alpha$, равен

$$dJ^{\mu\nu} = 2r^{[\mu}T^{\nu]\alpha}dV_\alpha + \Upsilon^{\mu\nu\alpha}dV_\alpha.$$

Замкнутая гиперповерхность $\partial\Omega$ получает полный момент 4-импульса

$$J^\mu\nu = \oint_{\partial\Omega}(2r^{[\mu}T^{\nu]\alpha} + \Upsilon^{\mu\nu\alpha})dV_\alpha =$$

$$= \int_\Omega (2r^{[\mu}\partial_\alpha T^{\nu]\alpha} - 2T^{[\mu\nu]} + \partial_\alpha \Upsilon^{\mu\nu\alpha}) d\Omega$$

Интеграл в правой части последнего равенства выражает полный момент 4-импульса, полученный полем в 4-объеме $\Omega$ от источников, связанных с током. Такими источниками являются как силы $\partial_\alpha T^{\nu\alpha}$ (орбитальный момент), так и вращающие моменты спинового происхождения $-2T^{[\mu\nu]} + \partial_\alpha \Upsilon^{\mu\nu\alpha}$. Если спиновые источники отсутствуют, то есть

$$2T^{[\mu\nu]} = \partial_\alpha \Upsilon^{\mu\nu\alpha}, \qquad (14)$$

мы говорим, что поле находится в равновесии в отношении спина.

Равенство (14) означает, что член Белинфанте-Розенфельда, $\partial_\beta(A_\mu F^{\alpha\beta})$, находится в равновесии с каноническим тензором спина со знаком минус (10). Поэтому добавление этого члена к каноническому тензору энергии-импульса сопровождается вычитанием канонического тензора спина из канонического тензора спина. В результате, процедура Белинфанте-Розенфельда не приводит к тензору Максвелла-Минковского, но элиминирует тензор спина. Вот почему классический спин отсутствует в современной электродинамике. Он считается равным нулю!

Поэтому полный момент импульса электромагнитного поля в теории Максвелла равен моменту вектора Пойнтинга и не содержит спинового члена. По сути, он является орбитальным моментом импульса. Гайтлер пишет [13]:

> В теории Максвелла вектор Пойнтинга $[\mathbf{EH}]$ (деленный на $c^2$) интерпретируется как плотность импульса поля. Поэтому момент количества движения относительно данной точки $O$ (или данной оси) можно определить как
>
> $$\mathbf{J} = \int [\mathbf{r}[\mathbf{EH}]] dV, \qquad (I.1)$$
>
> где $\mathbf{r}$ - расстояние от точки $O$.

Джексон пишет [14]:

> Плотность момента количества движения электромагнитного поля есть
>
> $$[\mathbf{r}[\mathbf{EH}]]$$

(в цитатах использованы наши обозначения). Вот почему считается, в частности, что плоская волна круговой поляризации не несет никакого момента импульса.

Гайтлер пишет [13]:

> Плоская волна, распространяющаяся вдоль оси $z$ (и не ограниченная в направлениях $x, y$), не имеет момента количества движения относительно этой оси, так как вектор $[\mathbf{EH}]$ направлен по оси $z$ и, следовательно, $[\mathbf{r}[\mathbf{EH}]]_z = 0$.

Естественно, что канонический тензор спина не верен, так же, как канонический тензор энергии-импульса. Действительно, рассмотрим, например, волну круговой поляризации, распространяющуюся в направлении оси $z$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{x}\cos(z-t) - \mathbf{y}\sin(z-t),$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{x}\sin(z-t) + \mathbf{y}\cos(z-t),$$

$$\mathbf{A} = -\int \mathbf{E} dt = \mathbf{H}. \qquad (15)$$

Компонента

$$\underset{c}{\Upsilon}^{zxy} = A^x H^{zy} = A^x H_x$$

тензора спина представляет собой плотность потока спинового момента импульса вокруг оси $y$ вдоль оси $y$. Эта величина не равна нулю, что не верно.

Тем не менее, плотность спина относительно оси $z$

$$\underset{c}{\Upsilon}^{jk0} = -2A^{[j}H^{k]0} = -2A^{[j}D^{k]} = \mathbf{D} \times \mathbf{A},$$

и плотность потока спина относительно оси $z$ вдоль оси $z$

$$\underset{c}{\Upsilon}^{jkz} = -2A^{[j}H^{k]z} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{H}$$

соответствуют реальности для плоской волны.

И тут возникает волнующая проблема. Каков истинный тензор спина электродинамики? Что нужно прибавить к каноническому тензору спина, чтобы получить истинный тензор спина?

Наш ответ состоит в следующем. Искомая спиновая добавка, $\Delta \underset{c}{\Upsilon}^{\mu\nu\alpha}$, и известная добавка тензора энергии-импульса,

$$\partial_\beta A_\mu F^{\alpha\beta}$$

должны находиться в равновесии:

$$\partial_\alpha(\Delta \underset{c}{\Upsilon}^{\mu\nu\alpha}) = 2\partial_\beta A^{[\mu} F^{\nu]\beta}. \qquad (16)$$

Уравнению (16) удовлетворяет простое выражение

$$\Delta \underset{c}{\Upsilon}^{\mu\nu\alpha} = 2A^{[\mu}\partial^{\nu]}A^\alpha,$$

и, таким образом, мы получаем [6, 8]

$$\Upsilon^{\mu\nu\alpha} = \underset{c}{\Upsilon}^{\mu\nu\alpha} + \Delta \underset{c}{\Upsilon}^{\mu\nu\alpha} = 2A^{[\mu}\partial^{|\alpha|}A^{\nu]}. \qquad (17)$$

Таким образом, наш тензор спина является функцией векторного потенциала $A_\mu$ и калибровочно не инвариантен. Мы приветствуем этот факт. Как показано [15], $A^\mu$ должен удовлетворять условию Лоренца, $\partial_\mu A^\mu = 0$.

## 5. Проблема плоских волн

Из-за того, что спин электродинамики считается равным нулю, всеобщее распространение получило мнение, что полный момент импульса $J^{ik}$ является моментом импульса, то есть полный момент импульса - это, по сути, орбитальный момент импульса,

$$dJ^{ik} = dL^{ik} = 2r^{[i}dP^{k]}, \qquad (18)$$

где $dP^k$ пропорционален вектору Пойнтинга. Отсюда вытекает, что плоская волна круговой поляризации без азимутальной фазовой структуры не имеет никакого момента импульса вдоль направления распространения [16, 17, 18, 13, 19, 20], что только квазиплоская волна конечного поперечного сечения, то есть луч, несет момент импульса, направленный вдоль направления распространения. Согласно (18) этот момент импульса обеспечивается поверхностью луча, поскольку уменьшение величины электромагнитных полей на поверхности луча порождает составляющие полей $E$ и $B$, параллельные волновому вектору, и, значит, составляющую вектора Пойнтинга, перпендикулярную волновому вектору. Этот момент импульса называют *спином* [20]. Его величина равна $W/\omega$, где $W$ - энергия, а $\omega$ - частота. Внутри луча поля $E$ и $B$ перпендикулярны волновому вектору, а поток массы-энергии параллелен волновому вектору [14]. Так что, внутри луча момент импульса отсутствует [20].

Для опровержения этой парадигмы весной 1999 года автор предложил специфический эксперимент [21]. Давайте рассмотрим плоскую круглую мишень, разделенную на центральный диск и окружающее его кольцо, разделенные узким зазором, величиной которого можно пренебречь. Согласно (6), при поглощении мишенью луча круговой поляризации диск не будет испытывать вращающего воздействия. Отсутствуют пондеромоторные силы, способные на такое воздействие. Однако в действительности диск, очевидно, будет закручиваться в противоречии с парадигмой.

Рассмотрев предложенный эксперимент, Аллен и Падгетт [22] согласились признать существование момента импульса у плоской волны вопреки [16, 17, 18, 13, 19, 20]. Однако они пытаются наделить плоскую волну моментом импульса в рамках стандартной электродинамики. Они пытаются объяснить вращение диска в рамках стандартной электродинамики. Авторы [22] пишут: «Любая форма апертуры приводит к значительному градиенту поля и порождает электромагнитные поля, направленные вдоль луча. Так что проблема потенциально разрешается.»

Увы! Небольшой зазор между диском и кольцом не апертуирует волну, не создает градиента, не порождает продольное поле, не создает момента импульса. Воображаемое разложение волны на три части в стиле [23], на внутреннюю, кольцевую, внешнюю часть, не порождает продольное поле. Согласно стандартной электродинамике, в районе диска отсутствуют пондеромоторные силы, которые могли бы привести к закручиванию диска. Максвелловские напряжения не способны привести диск во вращение. Согласно стандартной электродинамике, диск испытывает только световое давление и поглощает энергию.

Для разрешения проблемы мы должны использовать концепцию классического спина электродинамики, который описывается тензорной плотностью $\Upsilon^{\mu\nu\alpha}$. Таким образом, мы должны принять, что классическая электродинамика не полна. Пондеромоторное воздействие электромагнитного поля на элемент поверхности $da_j$, состоит из силы и вращающего момента (12).

$$d\mathcal{F}^i = T^{ij} da_j, \quad d\tau^{ik} = \Upsilon^{ikj} da_j.$$

Здесь $T^{ij}$ - максвелловский тензор напряжений, а $\Upsilon^{ikj}$ - тензор крутильных напряжений, являющийся пространственной частью вводимого нами тензора спина. Этот вращающий момент закручивает центральный диск в отсутствие касательных максвелловских сил. Одновременно максвелловские силы снабжают орбитальным моментом импульса кольцо. Кольцо получает также небольшой вращающий момент от $\Upsilon^{ikj}$.

Как подсчитано многократно, обе составляющие момента импульса, максвелловская и спиновая, равны между собой, $W/\omega$. Поэтому мы утверждаем, что суммарный, орбитальный плюс спиновый, момент импульса, содержащийся в луче круговой поляризации и получаемый мишенью, равен удвоенной величине,

$$J = L + S = 2W/\omega.$$

Этот результат впервые был представлен автором в статьях, направленных 25.02.99 в *УФН* и *ЖЭТФ*.

Разумеется, этот серьезный результат не должен противоречить классическому опыту Бета [24] по определению спина луча круговой поляризации. В этом опыте был зафиксирован момент импульса $J = W/\omega$. Оказывается, такой результат может быть объяснен только с использованием концепции тензора спина.

Опыт Бета был выполнен почти 70 лет назад. В опыте использовался луч света круговой поляризации, который изменял направление поляризации, проходя через полуволновую пластину. Затем он отражался от зеркала, пройдя при этом дважды через четвертьволновую пластину и, таким образом, снова изменив направление поляризации. Наконец, луч вторично проходил через ту же полуволновую пластину, изменив поляризацию в третий раз. Проходя через полуволновую пластину, луч оба раза передавал ей одинаково направленный момент импульса, так что в результате пластина, будучи подвешена на нити, поворачивалась.

Следует, однако, учитывать, что из-за интерференции проходящего и отраженного лучей в этом опыте поток энергии-импульса равен нулю. Действительно, обратимся к выражению Джексона [14] для луча круговой поляризации, $(\omega = k = 1)$.

$$\mathbf{E} = [\mathbf{x}\cos(z-t) - \mathbf{y}\sin(z-t) +$$
$$+ \mathbf{z}(-\sin(z-t)\partial_x - \cos(z-x)\partial_y)]E_0(x,y),$$
$$\mathbf{H} = -\int \mathrm{rot}\mathbf{E}dt =$$
$$= [\mathbf{x}\sin(z-t) + \mathbf{y}\cos(z-t) +$$
$$+ \mathbf{z}(\cos(z-t)\partial_x - \sin(z-x)\partial_y)]E_0(x,y).$$

Здесь $E_0(x,y) = \mathrm{Const}$ внутри луча, $E_0(x,y) = 0$ снаружи луча.

Отраженный луч получается изменением знаков $z$ и $y$. Складывая проходящий и отраженный лучи, получаем интересное выражение

$$\mathbf{E}_{\mathrm{tot}} = 2[(\mathbf{x}\cos z - \mathbf{y}\sin z)E_0 -$$
$$- \mathbf{z}(\sin z\, \partial_x E_0 + \cos z\, \partial_y E_0)]\cos t,$$
$$\mathbf{H}_{\mathrm{tot}} = -2[(\mathbf{x}\cos z - \mathbf{y}\sin z)E_0 -$$
$$- \mathbf{z}(\sin z\, \partial_x E_0 + \cos z\, \partial_y E_0)]\sin t.$$

$E$ и $H$ поля оказываются параллельны друг другу. Так что вектор Пойнтинга равен нулю. Поэтому, согласно теории Максвелла (18), пластинка Бета не должна ничего испытывать!

## 6. Симметричный тензор спина и его приложения

Выражение (17) для тензора спина, однако, не является окончательным, поскольку оно не симметрично в электромагнитном смысле. Дело в том, что электродинамика фактически не симметрична. Магнитная индукция замкнута, а напряженность магнитного поля имеет источник в виде электрического тока:

$$\partial_{[\alpha} F_{\mu\nu]} = 0, \quad \partial_\nu F^{\mu\nu} = -j^\mu.$$

Поэтому существует магнитный векторный потенциал, $A_\mu$, но не существует, вообще говоря, электрический векторный потенциал. Однако, при отсутствии токов, в частности, для электромагнитных волн, симметрия электродинамики восстанавливается, и появляется возможность ввести электрический мультивекторный потенциал, $\Pi^{\mu\nu\sigma}$, удовлетворяющий уравнению

$$\partial_\sigma \Pi^{\mu\nu\sigma} = F^{\mu\nu}.$$

Ковариантный вектор, дуальный к электрическому мультивекторному потенциалу,

$$\Pi_\alpha = \epsilon_{\alpha\mu\nu\sigma}\Pi^{\mu\nu\sigma},$$

является аналогом магнитного векторного потенциала. Мы называем его электрическим векторным потенциалом.

Используя векторные обозначения, электрический векторный потенциал можно ввести следующим образом.

Если $\mathrm{div}\mathbf{D} = 0$, то $\mathbf{D} = \mathrm{rot}\mathbf{\Pi}$.
Если при этом $\mathrm{rot}\mathbf{H} = \partial\mathbf{D}/\partial t$,
то $\mathbf{H} = \partial\mathbf{\Pi}/\partial t$.

Эта процедура аналогична получению магнитного векторного потенциала:

Если $\mathrm{div}\mathbf{B} = 0$, то $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\mathbf{A}$.
Если при этом $\mathrm{rot}\mathbf{E} =$ - $\partial\mathbf{B}/\partial t$,
то $\mathbf{E} =$ - $\partial\mathbf{A}/\partial t$.

В обоих случаях могут участвовать еще скалярные потенциалы, но мы можем считать их равными нулю.

При использовании электрического векторного потенциала, тензор спина разбивается на электрическую и магнитную части и

приобретает симметричный вид [6]:

$$\Upsilon^{\mu\nu\alpha} = \underset{e}{\Upsilon}{}^{\mu\nu\alpha} + \underset{m}{\Upsilon}{}^{\mu\nu\alpha} =$$

$$= A^{[\mu}\partial^{|\alpha|}A^{\nu]} + \Pi^{[\mu}\partial^{|\alpha|}\Pi^{\nu]}.$$

Применим теперь это симметричное выражение к стоячей волне круговой поляризации. Мы рассматриваем волну, падающую на сверхпроводящую $x,y$-поверхность, и отражающуюся от нее.

Сложим волну (15)

$$\mathbf{E}_{+xy} = \mathbf{x}\cos(z-t) - \mathbf{y}\sin(z-t),$$

$$\mathbf{H}_{+xy} = \mathbf{x}\sin(z-t) + \mathbf{y}\cos(z-t),$$

и отраженную волну

$$\mathbf{E}_{-xy} = \mathbf{x}\cos(z+t) + \mathbf{y}\sin(z+t),$$

$$\mathbf{H}_{-xy} = \mathbf{x}\sin(z+t) - \mathbf{y}\cos(z+t)$$

(индекс $\pm xy$ означает, что волна движется вдоль $z$ /против $z$ и $E$, $H$ вектора вращаются в $xy$ направлении).

В результате мы получаем

$$\mathbf{E} = 2(\mathbf{x}\cos t + \mathbf{y}\sin t)\cos z,$$

$$\mathbf{H} = 2(\mathbf{x}\cos t + \mathbf{y}\sin t)\sin z,$$

$$\mathbf{A} = -\int \mathbf{E}dt = 2(-\mathbf{x}\sin t + \mathbf{y}\cos t)\cos z,$$

$$\mathbf{\Pi} = \int \mathbf{H}dt = 2(\mathbf{x}\sin t - \mathbf{y}\cos t)\sin z,$$

$$\partial^t\mathbf{A} = 2(-\mathbf{x}\cos t - \mathbf{y}\sin t)\cos z,$$

$$\partial^t\mathbf{\Pi} = 2(\mathbf{x}\cos t + \mathbf{y}\sin t)\sin z,$$

$$\partial^z\mathbf{A} = 2(-\mathbf{x}\sin t + \mathbf{y}\cos t)\sin z,$$

$$\partial^z\mathbf{\Pi} = 2(-\mathbf{x}\sin t + \mathbf{y}\cos t)\cos z.$$

Мы используем сигнатуру $(+---)$, поэтому $\partial^z = -\partial_z$.

Электрическая и магнитная части плотности спина

$$\underset{e}{\Upsilon}{}^{xyt} = (A^x\partial^t A^y - A^y\partial^t A^x)/2 = 2\cos^2 z,$$

$$\underset{m}{\Upsilon}^{xyt} = (\Pi^x\partial^t\Pi^y - \Pi^y\partial^t\Pi^x)/2 = 2\sin^2 z,$$

при сложении дают постоянную величину, $\Upsilon^{xyt} = 2$.

Аналогично выглядит и плотность энергии

$$T^{00} = E^2/2 + H^2/2 = 2\cos^2 z + 2\sin^2 z = 2.$$

Поток спина равен нулю,

$$\underset{e}{\Upsilon}^{xyz} = (A^x\partial^z A^y - A^y\partial^z A^x)/2 = 0,$$

$$\underset{m}{\Upsilon}^{xyz} = (\Pi^x\partial^z\Pi^y - \Pi^y\partial^z\Pi^x)/2 = 0,$$

так же, как поток энергии, $E_xH_y - E_yH_x = 0$.

Мы рассмотрим теперь теорию опыта Бета. Будем считать луч Бета плоской волной, поскольку вектор Пойнтинга равен нулю, и поверхностные эффекты не имеют значения. Пусть поляризация света при падении на полуволновую пластинку будет $(+xy)$. Тогда после прохождения светом пластинки она сделается $(+yx)$. После отражения и двойного прохождения через четвертьволновую пластинку поляризация сделается $(-xy)$. И, наконец, после вторичного прохождения света через полуволновую пластинку, она делается $(-yx)$.

Перед полуволновой пластинкой мы имеем

$$\mathbf{E}_{+xy} + \mathbf{E}_{-yx} = \mathbf{x}\cos(z-t) - \mathbf{y}\sin(z-t) +$$

$$+\mathbf{x}\cos(z+t) - \mathbf{y}sin(z+t) =$$

$$= 2(\mathbf{x}\cos z - \mathbf{y}\sin z)\cos t,$$

$$\mathbf{A} = -\int \mathbf{E}dt = 2(\mathbf{x}\cos z - \mathbf{y}\sin z)(-\sin t),$$

$$\underset{e}{\Upsilon}^{xyz} = 2\sin^2 t.$$

Так что электрическая часть плотности спина однородна в пространстве, но пульсирует во времени. Подсчитаем магнитную часть!

$$\mathbf{H}_{+xy} + \mathbf{H}_{-yx} = 2(-\mathbf{x}\cos z + \mathbf{y}\sin z)\sin t,$$

$$\mathbf{\Pi} = \int \mathbf{H}dt = 2(\mathbf{x}\cos z - \mathbf{y}\sin z)\cos t,$$

$$\underset{m}{\Upsilon}^{xyz} = 2\cos^2 t.$$

Таким образом, полный поток спина постоянен, $\Upsilon^{xyz} = \underset{e}{\Upsilon}^{xyz} + \underset{m}{\Upsilon}^{xyz} = 2$.

Аналогичное вычисление для области за пластинкой дает $\Upsilon^{xyz} = -2$. Это означает, что $S^{xy}$-компонента спина движется против направления оси $z$, то есть также в направлении пластинки. В результате, пластинка получает поток плотности спина равный четырем при отсутствии потока энергии!

## Вывод

Максвелловская электродинамика не полна. Следует ввести тензор спина в современную электродинамику. Теоретики не заметили классический спин, потому что пренебрегают локализацией энергии-импульса согласно концепции неопределенности тензора энергии-импульса. Значение лагранжевого формализма переоценивается.

Я глубоко благодарен профессору Роберту Ромеру за публикацию [21].

## Литература

[1] *Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М.* Теория поля// М.: Наука, 1973.

[2] *Dirac P. A. M., Fock W. A., Podolsky B.*// Phys. Zs. Sowietunion, 1932, v. 2, 468.

[3] *Schweber S. S.* An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory// Row, Peterson and Co, N. Y. 1961.

[4] *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика// М.: Высшая школа, 1990.

[5] *Боголюбов Н. Н.и Ширков Д. В.* Введение в теорию квантованных полей// М.: ГИТТЛ, 1957, с.23

[6] *Храпко Р. И.* Истинные тензоры энергии-импульса и спина однозначны// сб. «Тезисы докладов 10-й Российской гравитационной конференции», М., 1999 с.47

[7] *Khrapko R. I.* True energy-momentum tensors are unique. Electrodynamics spin tensor is not zero// physics/0102084.

[8] *Храпко Р. И.*// www.mai.ru/projects/mai_works/ вып. 2 (2000), вып. 3, 6 (2001), вып. 9 (2002), вып. 10 (2003).

[9] *Belinfante F. J.*// Physica, 1939, v. 6, 887.

[10] *Rosenfeld L.*// Mem Acad. Roy. Belgique, 1940, v. 18, no. 6.

[11] *Wentzel G.* Quantum Theory of Fields// N. Y.: Interscience, 1949.

[12] *D. E. Soper D. E.* Classical Field Theory// N. Y.: J. Wiley, 1976).

[13] *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения// М.: ИЛ, 1956, с.451.

[14] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика// М.: Мир, 1965 с. 228

[15] *Khrapko R. I.* Violation of the gauge equivalence// physics/0105031.

[16] *Shapochnikov K.*// An. D. Phys. 1914, v. 43, .473.

[17] *Соколов И.* Момент импульса электромагнитной волны, эффект Садовского и генерация магнитных полей в плазме.// УФН 1991, т. 161, N 10, с. 175.

[18] *Humblet J.*// Physica 1943, v. 10, 585.

[19] *Crichton J. et al.*// GRG 1990, v. 22, 61.

[20] *Ohanian H. C.* What is spin?// Amer. J. Phys. 1986, v. 54, 500.

[21] *Khrapko R. I.* Does plane wave not carry a spin? // Amer. J. Phys. 2001, v. 69, 405.

[22] *Allen L., Padgett M. J.* Does a plane wave carry spin angular momentum?// Amer. J. Phys. 2002, v. 70, 567.

[23] *Simmonds J. W., and Gutman M. J.* States, Waves and Photons// Addison - Wesiey, Reading, MA, 1970.

[24] *Beth R. A.* Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light //Phys. Rev. 1936, v. 50, 115.


**Spin of the classical electrodynamics.**


**R. I. Khrapko**
Moscow Aviation Institute, 125993,
Moscow, Russia



A true energy-momentum tensor is unique and does not admit an addition of a term. The electrodynamics' true energy-momentum tensor is the Maxwell-Minkowski tensor. It cannot be derived by the Lagrange formalism.

An electrodynamics spin tensor is introduced. This tensor is zero in the Maxwell electrodynamics. So, ponderomotive acting on a surface element consists of both, the force from the Maxwell stress tensor and a torque from the torque tensor, which is a space part of the spin tensor. It is shown that a beam of simple circularly polarization carries spin and orbital angular momentums. So, the total angular momentum of the beam is doubled in comparison to the Maxwell theory. A theory of the Beth's experiment is presented for the first time.