

УДК 537.86

Наглядное изображение электромагнитных полей, *etc*

Р. И. Храпко

Кафедра физики
Московский авиационный институт
Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4

Последовательное использование внешних дифференциальных форм в электромагнетизме показывает, что поля электромагнетизма представляются геометрическими величинами двух различных типов: дифференциальными формами и контравариантными (антисимметричными) тензорными плотностями. Соответственно, электромагнитные поля изображаются силовыми трубками или семейством биперверхностей. Эти величины связаны между собой специфической операцией, названной сопряжением, которая является частью операции Ходжа. Сопряжение делает возможным многократное дифференцирование полей и таким образом приводит к цепочкам полей. Оператор Лапласа выражен в терминах сопряжения и изучено его воздействие на отдельные цепочки. Подробно и наглядно рассмотрены цепочки полей, связанные с электрическим и магнитным диполями. Разложение Гельмгольца представляет собой разложение поля на замкнутую и замкнутую после сопряжения части. Широко используется понятие границы поля. Найдено некоторое достаточное условие гармоничности поля.

Ключевые слова: дифференциальные формы; разложение Гельмгольца; операция Ходжа; оператор Лапласа.

1. Введение. Разложение Гельмгольца

При преподавании курса электромагнетизма естественно используется идея о том, что источником безвихревого (продольного) электрического поля являются электрические заряды. Это иллюстрируется тем, что силовые линии (правильнее, силовые трубки) этого поля исходят из зарядов, как на рис. 1, взятом из [1, с. 18], или на рис. 2. Мы обращаем внимание на то, что, таким образом, заряды оказываются границей силовых трубок этого поля [2]. Мы говорим, что плотность электрических зарядов ρ является *границей* безвихревого электрического поля и что это поле является *наполнением* этой границы. Переход от поля к его границе осуществляется дифференциальной операцией, в данном случае дивергенцией:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \nabla \cdot \mathbf{E} \equiv \partial_i E^i. \quad (1)$$

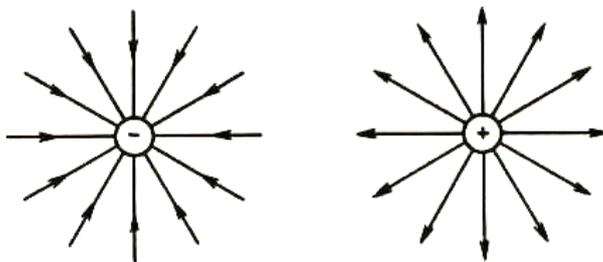


Рис. 1. Безвихревое векторное поле. Силовые линии исходят из зарядов

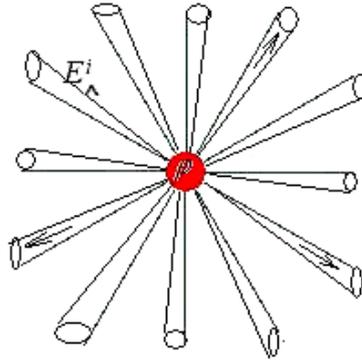


Рис. 2. Плотность заряда является границей силовых трубок векторной плотности E_{\wedge}^i . Трубки имеют внутреннюю ориентацию

Мы показываем, что такая же ситуация складывается в отношении всех других пар полей, которые связаны дифференциальными уравнениями первого порядка в различных ситуациях, например, $-\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{E}$, $-\dot{\rho} = \text{div}\mathbf{j}$, $\mathbf{j} = \text{rot}\mathbf{B}$, $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$, $-\mathbf{E} = \text{grad}\varphi$. Именно, геометрическое многообразие, изображающее некоторое поле, имеет своей границей многообразие, изображающее источник этого поля. В то же время само это поле рассматривается как наполнение его границы. Соотношение $-\mathbf{E} = \text{grad}\varphi$ изображено на рис. ???. Соотношение $\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{A}$ изображено на рис. ???а. При этом математически переход от поля к его границе всегда осуществляется подходящей дифференциальной операцией первого порядка.

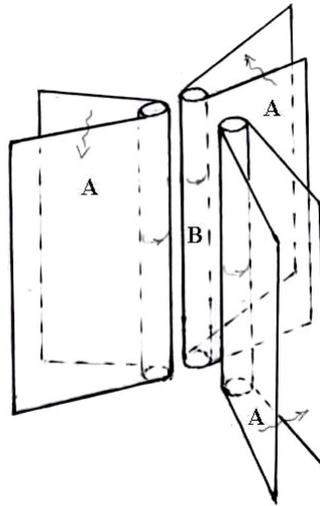


Рис. 3. Трубки замкнутого поля \mathbf{B} ограничивают бипервности поля векторного потенциала \mathbf{A}

Существуют, однако, поля, граница которых равна нулю. Наиболее простой пример это соленоидальное (поперечное) электрическое поле, для которого $\text{div}\mathbf{E} = 0$. Оно изображено на рис. 4, взятом из [3, р. 726]. Силовые линии (силовые трубки) этого поля не имеют концов. Мы называем это поле замкнутым и показываем, что такая же ситуация складывается для всех других полей, граница которых равна нулю, т. е. для полей, удовлетворяющих, например, уравнениям

$\text{rot}\mathbf{E} = 0$, $\text{div}\mathbf{j} = 0$, $\text{rot}\mathbf{B} = 0$. Именно, геометрические многообразия, изображающие такие поля, замкнуты. Забегая вперед, отметим, что источники замкнутых полей обнаруживаются у их сопряжённых аналогов в разделе 3.

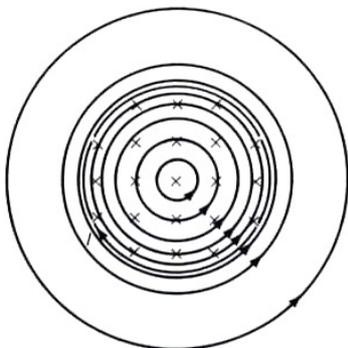


Рис. 4. Соленоидальное электрическое поле, порожденное переменным магнитным полем соленоида. Силовые линии замкнуты. Они не имеют концов

Известное разложение Гельмгольца [4, р. 241], [5, с. 177] заключается как раз в том, что некоторое поле, например, электрическое векторное поле \mathbf{E} , представляется суммой двух векторных полей, безвихревого поля, которое мы обозначаем \mathbf{E}_\times , и соленоидального поля, которое мы обозначаем \mathbf{E}_\circ :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\times + \mathbf{E}_\circ, \quad \text{rot}\mathbf{E}_\times \equiv \nabla \times \mathbf{E}_\times = 0, \quad \text{div}\mathbf{E}_\circ \equiv \nabla \cdot \mathbf{E}_\circ = 0, \quad (2)$$

Безвихревое электрическое поле обычно обозначают \mathbf{E}_l [4, р. 242] или \mathbf{E}_\parallel , однако главной чертой этого поля является то, что его силовые линии выходят из зарядов как показано на рис. 1. Чтобы подчеркнуть это свойство, мы используем крестик \times для обозначения первого слагаемого в формуле (2).

Соленоидальное электрическое векторное поле обычно обозначают \mathbf{E}_t [4, р. 242] или \mathbf{E}_\perp , однако главной чертой этого поля является замкнутость его силовых линий (рис. 4). Поэтому мы выбрали кружок \circ для обозначения второго слагаемого разложения Гельмгольца (2).

2. Дифференциальные формы, тензорные плотности, граница, etc

Важно осознавать, что электромагнитные поля на самом деле описываются геометрическими величинами двух различных типов [6, р. 133], [7, с. 192].

Во-первых, это контравариантные (антисимметричные) тензорные плотности: B_Λ^{ik} , j_Λ^i , E_Λ^i , ρ_Λ . В число таких полей входит рассмотренное выше «векторное поле \mathbf{E} », которое в действительности является векторной плотностью.

Во-вторых, это ковариантные (антисимметричные) тензоры, в частности, скалярные функции и ковекторы, именно, φ , E_i , A_i , B_{ij} , которые называются внешними дифференциальными формами (кратко, формами).

Разница между формами и тензорными плотностями известна давно (см. рис. 5, взятый из [6, р. 133]). Классическая монография [6, 7] выросла из лекций, которые профессор Схоутен читал на эту тему перед войной. В частности, поле векторной плотности должно изображаться не силовыми линиями, как на рис. 1, а силовыми трубками (рис. 2), а ковариантное векторное поле (ковекторное поле) должно изображаться семейством двойных поверхностей (биповерхностями). Сходная интерпретация ковектора представлена в [8] (рис. 6). Заметьте, что

величина ковектора пропорциональна плотности листов, то есть обратно пропорциональна толщине. Точно так же величина векторной плотности обратно пропорциональна площади поперечного сечения трубок.

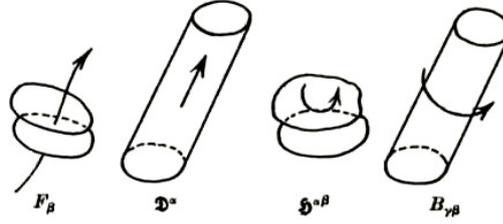


Рис. 5. Показана разница между дифференциальными формами и контравариантными тензорными плотностями. Мы обозначаем эти геометрические величины, слева направо, E_i , E_\wedge^i , B_\wedge^{ij} , B_{ij}

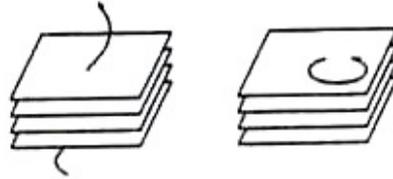


Рис. 6. Слева изображен ковектор, например, E_i . Плоскости имеют внешнюю ориентацию. Справа изображена бивекторная плотность, например, B_\wedge^{ij} . Плоскости имеют внутреннюю ориентацию

К сожалению, разница между формами и тензорными плотностями игнорируется большинством физиков. Эта разница теряется при написании векторов полужирным шрифтом. Мы используем тензорные индексы, потому что они несут необходимую информацию. Кроме того, для написания тензорных *плотностей* мы не используем обычный для этого готический шрифт (как на рис. 5). Вместо этого мы отмечаем плотности знаком 'wedge' \wedge . Такое обозначение использовал И.А. Кунин [7, с. 52] при (замечательном) переводе на русский язык монографии [6]. Однако, в отличие от [7], мы ставим знак \wedge на уровне нижних или верхних индексов для плотностей веса +1 или -1 соответственно. Например, элемент объема, который является плотностью веса -1, обозначается dV^\wedge . Мы отмечаем псевдо тензоры звездочкой, а псевдо плотности знаком тильда, \sim : E_{ij}^* , B_j , $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$ ($\tilde{\varepsilon}_{ijk}$ — символ Леви-Чивита).

В электродинамике используется внешняя производная дифференциальных форм [9–11]. Внешняя производная скаляра является обычной частной производной, т. е. градиентом,

$$E_i = \partial_i \phi \Leftrightarrow \mathbf{E} = \text{grad} \phi = \nabla \cdot \phi \quad (3)$$

(мы не пишем минус в этой формуле, соответственно, $\rho = \nabla^2 \phi$). Однако в общем случае внешняя производная предполагает антисимметризацию по индексам. Внешняя производная ковектора является ротором, например,

$$\begin{aligned} B_{ij} &= 2\partial_{[i} A_{j]} \Leftrightarrow \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \text{или} \\ \dot{B}_{ij} &= -2\partial_{[i} E_{j]} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{B}} = -\text{rot} \mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\partial_{[i} A_{j]} = \frac{1}{2}(\partial_i A_j - \partial_j A_i)$. Внешняя производная ковариантного тензора валентности 2 является дивергенцией,

$$3\partial_{[k} B_{ij]} = 0 \Leftrightarrow \text{div} \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (5)$$

где

$$\partial_{[k}B_{ij]} = \frac{1}{3!}(\partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} - \partial_j B_{ki} - \partial_k B_{ji} - \partial_i B_{kj} - \partial_j B_{ik}) = \frac{1}{3}(\partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki}).$$

При дифференцировании контравариантных тензорных плотностей в электродинамике предполагается свертка с последним контравариантным индексом. Такая производная векторной плотности является дивергенцией:

$$\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\wedge}^i \Leftrightarrow \rho = \operatorname{div} \mathbf{E}, \quad (6)$$

производная бивекторной плотности является ротором

$$j_{\wedge}^i = \partial_k B_{\wedge}^{ik} \Leftrightarrow \mathbf{j} = \operatorname{rot} \mathbf{B} \quad \text{или} \quad \mathbf{E}_{\wedge}^i = \partial_j \Pi_{\wedge}^{ij} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{\Pi}. \quad (7)$$

Производная скалярной плотности есть ноль,

$$\partial_i \rho_{\wedge} \equiv 0 \Leftrightarrow \operatorname{grad} \rho_{\wedge} \equiv 0, \quad (8)$$

потому что ρ_{\wedge} не имеет контравариантных индексов для свертки. Производная (8) аналогична внешней производной N -формы, где N есть размерность пространства.

Мы подчеркиваем, что все представленные здесь дифференциальные операции являются ковариантными операциями в том смысле, что их запись не зависит от того, евклидовы или криволинейные координаты использованы, и все частные производные являются ковариантными без использования символов Кристоффеля: $\partial_k B_{\wedge}^{ik} = \nabla_k B_{\wedge}^{ik}$, $\partial_{[i} A_{j]} = \nabla_{[i} A_{j]}$.

Обычно мы обозначаем производные обоих типов символом ∂ без индексов и называем производное поле *границей*, а дифференцируемое поле называем *наполнением* этой границы. Это выглядит так: (граница) = ∂ (наполнение). Например,

$$\rho_{\wedge} = \partial E_{\wedge}^i, \quad E_i = \partial \phi, \quad B_{ij} = 2\partial A, \quad \mathbf{E}_{\wedge}^i = \partial \Pi_{\wedge}^{ij}, \quad j_{\wedge}^i = \partial B_{\wedge}^{ik}, \quad \partial B_{ij} = 0. \quad (9)$$

Термин «граница» оправдан, потому что, например, зарядовая плотность ρ_{\wedge} ограничивает силовые трубки плотности электрического поля E_{\wedge}^i в соответствии с $\rho_{\wedge} = \partial E_{\wedge}^i$ (рис. 2). Двойные поверхности поля E_i ограничивают поле электрического потенциала ϕ в соответствии с $E_i = \partial \phi$ (рис. ??). Трубки магнитного поля B_{ij} ограничивают биперповерхности ковекторного поля магнитного потенциала A_j в соответствии с $B_{ij} = 2\partial_{[i} A_{j]}$. Причём внешняя ориентация биперповерхностей A_j соответствует внешней ориентации трубок B_{ij} (рис. ??а). Трубки электрической векторной плотности E_{\wedge}^i с внутренней ориентацией ограничивают биперповерхности (би)векторного электрического потенциала Π_{\wedge}^{ij} в соответствии с $\mathbf{E}_{\wedge}^i = \partial_j \Pi_{\wedge}^{ij}$ (рис. ??б). Так же трубки векторной плотности тока j_{\wedge}^i с внутренней ориентацией ограничивают биперповерхности магнитного поля B_{\wedge}^{ij} в соответствии с $j_{\wedge}^i = \partial_j B_{\wedge}^{ij}$.

С другой стороны, символ ∂ означает «граница» в теории множеств. И это как раз то значение, которое имеет наш символ ∂ .

Однако, для того, чтобы что-то ограничивать, граница должна быть замкнутой. Так оно и есть. Двукратное применение оператора границы даёт ноль, $\partial \partial = 0$. Например, если $E_i = \partial_i \phi$, то $\partial_{[k} E_{i]} = \partial_{[k}^2 \phi = 0$. Так что граница границы равна нулю. Если граница некоторого поля равна нулю, мы говорим, что поле замкнуто. Например, поле E_i в формуле (3) и поле B_{ij} замкнуты. Соответственно, биперповерхности поля E_i на рис. ?? и трубки поля B_{ij} на рис. ??а не имеют концов. Трубки поля B_{ij} могли бы оканчиваться на магнитных монополях, но таких нет в природе. Пример замкнутого электрического векторного поля E_{\wedge}^i , $\partial_i E_{\wedge}^i = 0$, представлен на рис. ??б и рис. 4 (там должны быть изображены трубки, а не силовые линии).

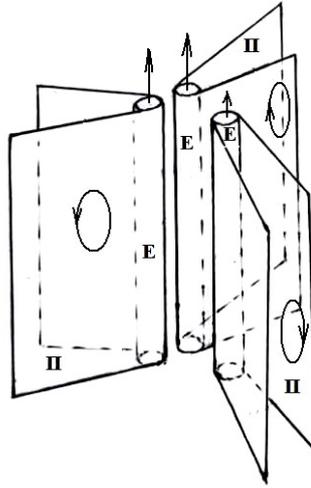


Рис. 7. Трубки замкнутого поля E ограничивают биперверхности поля векторного потенциала Π

Граница не имеет границы, но граница имеет *наполнение* в силу теоремы Пуанкаре (в пространстве без топологических осложнений). В случае $E_i = \partial_i \phi$, E_i является границей, а ϕ есть её наполнение. Наполнение этой границы функцией ϕ наглядно показано на рис. ???. Точно так же можно сказать, что биперверхности поля A_i на рис. ???а наполняют пространство, вокруг замкнутых (бесконечно длинных) трубок поля B_{ij} , которые являются их границей, $B_{ij} = \partial A_j$, а биперверхности (би)векторного электрического потенциала Π_{\wedge}^{ij} наполняют пространство вокруг трубок поля E_{\wedge}^i , $E_{\wedge}^i = \partial_j \Pi_{\wedge}^{ij}$. Отношение между E_{\wedge}^i и Π_{\wedge}^{ij} изображены на рис. ???б, который отличается от рис. ???а заменой внешней ориентации на внутреннюю.

Таким образом, символ ∂ выражает отношение между границей и её наполнением, т. е. ∂ является оператором границы. Отметим, что граница некоторого поля однозначна, в то время как наполнение границы не однозначно, если к наполнению можно добавить замкнутое поле. Это происходит без изменения границы. Тем не менее, различные наполнения некоторой границы не все эквивалентны между собой. Имеются *истинные* наполнения (или класс истинных наполнений), которые выделяются с помощью операции *сопряжения*, рассматриваемой в следующем разделе.

Когда наш символ ∂ применяется к форме, он означает внешнее дифференцирование, вместо стандартного обозначения d [9–11]. Например, ∂B_{ij} означает внешнее произведение форм $d \wedge B$, то есть $\partial B_{ij} = \partial_k B_{ij} + \partial_i B_{jk} + \partial_j B_{ki}$ (5). Мы убеждены, что стандартное использование символа d для обозначения внешнего дифференцирования сугубо антипедагогично. Символ d применяется в физике и математике для обозначения инфинитезимальной величины. Например, $dq = \rho(x)dV$ обозначает инфинитезимальный заряд инфинитезимального объема dV . Другой пример: $\mathbf{r} + \mathbf{v}dt = \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, где \mathbf{v} есть скорость, а $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$ есть инфинитезимальное приращение радиус-вектора \mathbf{r} за время dt , и dx , dy , dz суть инфинитезимальные приращения координат его конца. Также пишут $df(x) = f'(x)dx$, и можно записать $d(df) = d^2f = f''(dx)^2$ или даже $d^2f = f''(dx)^2 + f'd^2x$.

Вопреки этому, в теории дифференциальных форм d используется как оператор, который каждой p -форме ω ставит в соответствие $(p+1)$ -форму $d\omega$, и $d(d\omega) = 0$ всегда [9–11]. Соответственно, выражения dx , dy , dz суть безиндексные обозначения координатных 1-форм, т. е. координатных ковекторов, а не компонентов инфинитезимального вектора $d\mathbf{r}$, т. е. dx , dy , dz означают:

$$dx = \partial_i x = \delta_i^1, \quad dy = \partial_i y = \delta_i^2, \quad dz = \partial_i z = \delta_i^3,$$

где δ_i^j есть символ Кронекера.

Такая путаница недопустима. Возможно, двусмысленность обозначения d объясняется тем, что область применения теории дифференциальных форм не пересекалась с областью применения обычной физики и математики. Однако, сейчас мы рассматриваем электромагнитные поля как дифференциальные формы. Поэтому двусмысленность символа d должна быть устранена.

3. Сопряжение, etc

Поднимание и опускание тензорных индексов обычно выполняется метрическим тензором g^{ik} или g_{ik} . Однако в электромагнетизме этот процесс сопровождается переходом между дифференциальной формой и контравариантной плотностью, например, между ковектором E_i и векторной плотностью E_\wedge^i , как показано на рис. 8. Поэтому в этот процесс включен корень из детерминанта метрического тензора, $\sqrt{g_\wedge}$, который является скалярной плотностью веса $+1$. Так что, вместо g^{ik} или g_{ik} , в электромагнетизме используется тензорная плотность $g_\wedge^{ik} = g^{ik} \sqrt{g_\wedge}$ или $g_\wedge^{ik} = g_{ik} / \sqrt{g_\wedge}$. Если применяются декартовы координаты, то абсолютное значение детерминанта равно единице, однако корень из детерминанта имеет вполне определенное геометрическое значение. Процесс поднятия или опускания тензорных индексов изменяет геометрический смысл поля. Этот процесс в электродинамике мы называем *сопряжением* [12, 13] и обозначаем пяти-лучевой звездочкой \star (в отличие от оператора Ходжа $*$ [11, р. 15], [14, р. 314]). Например,

$$\begin{aligned} \star E_i &= g_\wedge^{ik} E_i = E_\wedge^k, & \star E_\wedge^k &= g_\wedge^{ik} E_\wedge^k = E_i, \\ \star B_\wedge^{mn} &= g_{mi} g_\wedge^{nj} B_\wedge^{mn} = B_{ij}, & \star B_{ij} &= g^{im} g_\wedge^{jn} B_{ij} = B_\wedge^{mn}. \end{aligned} \quad (10)$$

Сопряжение \star , очевидно, инволютивно: $\star\star = 1$. Мы говорим, что поле и сопряжённое ему поле образуют *тандем*. Например, E_j & E_\wedge^i или B_\wedge^{ij} & B_{ij} суть танделы. Они изображены на рис. 8 и 9.

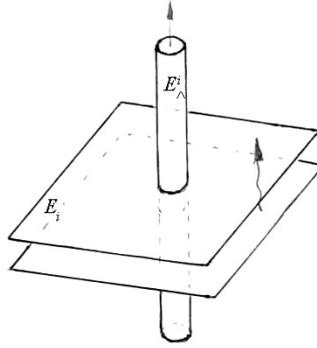


Рис. 8. Взаимно сопряженные ковектор и векторная плотность образуют тандем. Например, E_i и E_\wedge^i или A_i и A_\wedge^i или j_i и j_\wedge^i . Элемент двойной поверхности ортогонален силовой трубке. Внешняя ориентация двойной поверхности соответствует внутренней ориентации силовой трубки

Сопряжение \star отличается от операции Ходжа $*$. Оператор Ходжа выполняет сопряжение \star , но затем перенумеровывает компоненты поля антисимметричной псевдо плотностью $\tilde{\varepsilon}_{ijk}$. Например, $\star E_i \stackrel{def}{=} \tilde{\varepsilon}_{mnj} g_\wedge^{ij} E_i = \tilde{\varepsilon}_{mnj} E_\wedge^j = e_{mn}^*$. Здесь оператор Ходжа преобразует 1-форму E_i в псевдо 2-форму E_{mn}^* . Однако перенумерация не имеет физического и геометрического значения, потому что E_{mn}^* имеет тот же самый геометрический смысл, что и векторная плотность $E_\wedge^j = \star E_i$. В то же время, гораздо приятнее иметь дело с векторной плотностью E_\wedge^j , чем с

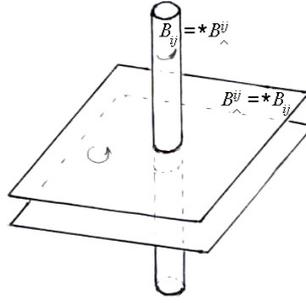


Рис. 9. Взаимно сопряженные 2-форма и бивекторная плотность образуют тандем. Например, B_{ij} и B_{\wedge}^{ij} . Элемент двойной поверхности ортогонален силовой трубке. Внутренняя ориентация двойной поверхности соответствует внешней ориентации силовой трубки

псевдо 2-формой E_m^* . Поэтому добавление перенумерации к сопряжению не имеет смысла. К тому же, оператор Ходжа не применим к контравариантным плотностям. Мы не используем оператор Ходжа.

Для сокращения мы будем в дальнейшем иногда называть контравариантные антисимметричные плотности сопряжёнными формами или кратко *коформами*.

Замечательно, что сопряжение часто превращает замкнутое поле в не замкнутое. Например, замкнутое поле B_{ij} превращается в поле B_{\wedge}^{mn} , которое имеет границей плотность тока:

$$\partial B_{ij} = 0, \quad \text{но} \quad \partial * B_{ij} = \partial_n (g^{im} g_{\wedge}^{jn} B_{ij}) = \partial_n B_{\wedge}^{mn} = \mu_0 j_{\wedge}^m. \quad (11)$$

Поля, замкнутые до или после применения сопряжения, мы называем *сопряжённо-замкнутыми* или кратко *козамкнутыми* полями. Например, B_{ij} замкнуто, но B_{\wedge}^{mn} козамкнуто, потому что $\partial * B_{\wedge}^{mn} = \partial B_{ij} = 0$. Истинное *наполнение* некоторой границы, о котором упоминалось в предыдущем разделе, должно быть козамкнуто. Поэтому добавление к наполнению замкнутого поля, вообще говоря, нарушает истинность. Так истинным наполнением зарядовой плотности ρ_{\wedge} является козамкнутая напряжённость E_{\wedge}^i (рис. 1, ??). Добавление замкнутой напряжённости E_{\circ}^i не меняет границы поля E_{\wedge}^i , однако поле $E_{\wedge}^i = E_{\wedge}^i + E_{\circ}^i$ не является истинным наполнением плотности ρ_{\wedge} , поскольку E_{\circ}^i не козамкнуто: $\partial * E_{\circ}^i = -\partial_t \mathbf{V}$ (рис. 4).

Отметим, что если метрика сопряжения положительно определена, то *ограниченное* поле, которое замкнуто и одновременно козамкнуто, может быть только постоянным.

Оператор Ходжа используется для определения так называемого *кодифференциала* от формы [14, р. 315]

$$\delta \omega^p = (-1)^{np+n+1} * \partial * \omega^p, \quad (12)$$

где ∂ есть символ внешнего дифференцирования, n есть размерность пространства, и p есть степень формы ω^p . Можно показать, что конструкция $*\partial*$ отличается от $\partial*$ только знаком:

$$*\partial * \omega^p = (-1)^{np+n+p+1} \star \partial \star \omega^p. \quad (13)$$

Это даёт простое выражение кодифференциала через сопряжение. Оно не зависит от размерности пространства:

$$\delta \omega^p = (-1)^p \star \partial \star \omega^p. \quad (14)$$

Теперь возвратимся к разложению Гельмгольца (1). Оно должно быть переписано в индексной форме в терминах векторной плотности,

$$E_{\times\wedge}^i = E_{\times\wedge}^i + E_{\circ\wedge}^i. \quad (15)$$

Безвихревое кулоновское поле $\mathbf{E}_{\times\wedge} = E_{\times\wedge}^i$, которое удовлетворяет $\text{rot}\mathbf{E}_{\times\wedge} \equiv \nabla \times \mathbf{E}_{\times\wedge} = 0$, козамкнуто, потому что дифференциальная операция rot , применяемая к векторной плотности, подразумевает предварительное сопряжение:

$$\nabla \times \mathbf{E}_{\times\wedge} = 2\partial_{[k}(g_{j]i}^{\wedge} E_{\times\wedge}^i) = \partial \star \mathbf{E}_{\times\wedge} = 0. \quad (16)$$

Таким образом, метка \times , которая использовалась в разделе 1, отмечает козамкнутые поля.

В результате мы видим, что разложение Гельмгольца (1) является разложением поля на козамкнутую и замкнутую части.

4. Цепочки полей

Свойство сопряжения превращать замкнутые поля в козамкнутые обеспечивает существование бесконечных или конечных цепочек полей. Мы представляем здесь в качестве примера бесконечную цепочку электростатики.

$$\dots (\partial) \rho_{\times}(\star) \rho_{\circ\wedge}(\partial) E_{\times\wedge}^i(\star) E_{\circ\wedge}^i(\partial) \phi_{\times}(\star) \phi_{\circ\wedge}(\partial) Z_{\times\wedge}^i(\star) Z_{\circ\wedge}^i(\partial) \psi_{\times}(\star) \psi_{\circ\wedge}(\partial) \dots \quad (17)$$

Здесь звенья цепочки, т. е. поля $\rho_{\wedge}(x)$, $E_{\wedge}^i(x)$, $\phi_{\wedge}(x)$, $Z_{\wedge}^i(x)$, etc., разделены символами (∂) и (\star) . Это значит, например, что $\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\times\wedge}^i$, $E_{\times\wedge}^i = \star E_{\circ\wedge}^i = \partial \phi$, $\phi_{\wedge} = \partial_i Z_{\times\wedge}^i$, где Z^i есть так называемый электрический вектор Герца (см., например, [15, с. 128]).

Если ρ_{\wedge} является дельта функцией Дирака, $\rho_{\wedge} = \delta_{\wedge}(x)$, то мы имеем дело с полем точечного заряда. В этом случае цепочка в явном виде выглядит так:

$$\dots \delta(\star) \delta_{\wedge}(\partial) \frac{r_{\wedge}^i}{4\pi r^3}(\star) \frac{r_i}{4\pi r^3}(\partial) \frac{-1}{4\pi r}(\star) \frac{-1_{\wedge}}{4\pi r}(\partial) \frac{-r_{\wedge}^i}{8\pi r}(\star) \frac{-r_i}{8\pi r}(\partial) \frac{-r_{\wedge}}{8\pi}(\star) \frac{-r}{8\pi}(\partial) \frac{-rr_{\wedge}^i}{32\pi}(\star) \frac{-rr_i}{32\pi} \dots \quad (18)$$

Действительно, замкнутая плотность точечного заряда $\rho_{\wedge}(x) = \delta_{\wedge}(x)$ является границей козамкнутой плотности векторного электрического поля $E_{\wedge}^i = r_{\wedge}^i/4\pi r^3$, а сопряжённое ему замкнутое ковекторное поле $E_{\circ\wedge}^i = r_i/4\pi r^3$ является границей потенциала $\phi = -1/4\pi r$ и т. д.

Ограничившись этим примером, представим теперь в общем виде четыре существующие цепочки полей в 4-мерном пространстве (пространстве-времени). Естественно, цепочки содержат, кроме знакомых, гипотетические поля:

$$\dots (\partial) \xi_{\lambda\mu\nu}(\star) \xi_{\circ\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) T_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\star) T_{\circ\wedge}^{\eta\lambda\mu\nu}(\partial) \Pi_{\lambda\mu\nu}(\star) \Pi_{\circ\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\partial) U_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma\delta}(\star) U_{\circ\wedge}^{\eta\lambda\mu\nu}(\partial) R_{\lambda\mu\nu}(\star) R_{\circ\wedge}^{\alpha\beta\gamma} \dots \quad (19)$$

$$\dots Q_{\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) \xi_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) \xi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu}(\partial) B_{\mu\nu}(\star) B_{\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) \Pi_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) \Pi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu}(\partial) Z_{\mu\nu}(\star) Z_{\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) R_{\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) R_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu} \dots \quad (20)$$

$$\dots (\star) Q_{\circ\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) j_{\nu}(\star) j_{\circ\wedge}^{\alpha}(\partial) B_{\wedge}^{\alpha\beta}(\star) B_{\circ\wedge}^{\mu\nu}(\partial) A_{\nu}(\star) A_{\wedge}^{\alpha}(\partial) Z_{\wedge}^{\alpha\beta}(\star) Z_{\circ\wedge}^{\mu\nu}(\partial) \psi_{\nu}(\star) \psi_{\wedge}^{\alpha}(\partial) \dots \quad (21)$$

$$\dots (\partial) P_{\times}(\star) P_{\circ}(\partial) j_{\times}^{\alpha}(\star) j_{\circ}(\partial) b_{\times}(\star) b_{\circ}(\partial) A_{\times}^{\alpha}(\star) A_{\circ}(\partial) q_{\times}(\star) q_{\circ}(\partial) \psi_{\times}^{\alpha}(\star) \psi_{\circ}(\partial) \dots \quad (22)$$

Греческие индексы пробегают значения 0, 1, 2, 3.

В цепочках (20), (21) мы обозначили электромагнитный тензор через $B_{\mu\nu} = -F_{\mu\nu}$ вместо $F_{\mu\nu}$, чтобы 4-ток был границей электромагнитного поля, $j_{\times}^{\alpha} = \partial_{\beta} B_{\times}^{\alpha\beta}$ вместо обычного равенства $j_{\times}^{\alpha} = -\partial_{\beta} F_{\times}^{\alpha\beta}$.

В цепочках (21), (22) *наш* магнитный векторный 4-потенциал A_{ν} удовлетворяет равенству $B_{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$, и потому противоположен по знаку к обычному векторному 4-потенциалу A_{ν} : $A_{\nu} = -A_{\nu}$, $A^{\alpha} = -A^{\alpha}$.

Цепочки (17) и (18) используют евклидову метрику для сопряжения, $g_{ij} = \text{diag}\{+1, +1, +1\}$. Однако цепочки электромагнетизма (19)–(22) используют $g_{\mu\nu} = \text{diag}\{+1, -1, -1, -1\}$. Поэтому, $A_0 = A^0 = A_0 = A^0 = \varphi = -\varphi$, но $B_{i0} = -B^{i0} = E_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i = -\partial_i \varphi + \partial_0 A_i$ или $B_{31} = B^2 = \partial_3 A_1 - \partial_1 A_3$. При использовании полужирного шрифта обычно пишут $A_4^{\alpha} = (\varphi, \mathbf{A})$. Это означает $A^i = A_4^i = -A^i$, где A^i обозначает контравариантные компоненты пространственного вектора \mathbf{A} . Однако в отношении пространственного вектора \mathbf{A} действует евклидова метрика. Поэтому для ковариантных компонент вектора \mathbf{A} будет $A_i = -A_4^i = A_i$. Для нашего 4-потенциала A справедливо $A^{\alpha} = (-\varphi, -\mathbf{A})$, $A_{\nu} = (-\varphi, \mathbf{A})$.

Из цепочки (20) в литературе представлены уравнения Максвелла $\xi_{\lambda\mu\nu} = 3\partial_{[\lambda} B_{\mu\nu]} = 0$, справедливые вследствие отсутствия токов магнитных монополей $\xi_{\lambda\mu\nu}$, и формула с электрическим 3-векторным потенциалом $P_{\times}^{\alpha\beta\gamma}$, $B_{\times}^{\alpha\beta} = \partial_{\gamma} P_{\times}^{\alpha\beta\gamma}$. При электро-магнитной симметрии магнитные токи монополей $\xi_{\lambda\mu\nu}$ существуют. Тогда они подчиняются уравнению непрерывности $\partial \xi_{\lambda\mu\nu} = 4\partial_{[\eta} \xi_{\lambda\mu\nu]} = 0$, т.е. $\partial_0 \xi_{ijk} - \partial_i \xi_{0jk} + \partial_j \xi_{0ik} - \partial_k \xi_{0ij}$. Это уравнение принимает знакомую 3-мерную форму, именно, $\partial_0 \xi_{\sim} + \partial_i \xi_{\sim}^i = 0$, если провести *дуализацию*, т.е. ввести псевдоплотность магнитных зарядов $\xi_{\sim} = \xi_{ijk} \varepsilon^{ijk} / 3!$ и псевдоплотность магнитных токов $\xi_{\sim}^i = \xi_{jk} \varepsilon^{ijk}$, где мы обозначили $\xi_{jk} = \xi_{j0k}$.

Из цепочки (21) в литературе представлены уравнения Максвелла $j_{\times}^{\alpha} = \partial_{\beta} B_{\times}^{\alpha\beta}$, формула с магнитным векторным 4-потенциалом, $B_{\circ}^{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}$, и формулы с вектором Герца [14, (42.4)] $A_{\times}^{\alpha} = \partial_{\beta} Z_{\times}^{\alpha\beta}$.

Заметьте, что четыре цепочки (19)–(22) попарно комплементарны: (19) и (20) комплементарны между собой относительно магнитного тока ξ , потенциала Π , гипотетического поля R ; (20) и (21) комплементарны относительно электромагнитного поля B , поля Герца Z ; (21) и (22) комплементарны относительно электрического тока j , потенциала A , гипотетического поля ψ .

Если значения индексов ограничить числами 1, 2, 3, цепочка (19) выпадает, и остаются три цепочки полей магнитостатики. В частности, вместо (20) имеем

$$\dots Q_{\circ}^{ij}(\partial) \xi_{\times}^{ijr}(\star) \xi_{\circ}^{mkl}(\partial) B_{\times}^{kl}(\star) B_{\circ}^{ij}(\partial) \quad (23)$$

$$(\partial) \Pi_{\times}^{ijr}(\star) \Pi_{\circ}^{mkl}(\partial) Z_{\times}^{kl}(\star) Z_{\circ}^{ij}(\partial) R_{\times}^{ijr}(\star) R_{\circ}^{mkl} \dots$$

Здесь соотношение $\xi_{mkl} = 3\partial_{[m} B_{\times}^{kl]}$, т.е. $\xi_{\sim} = 3\partial_m B_{\times}^m$, означает $\xi = \text{div} \mathbf{B}$, т.е. магнитный заряд (псевдо скалярная плотность монополей) является границей (псевдо векторной плотности) магнитного поля. После сопряжения это поле делается замкнутым, и оказывается границей потенциала магнитного поля. $B_{\circ}^{ij} = \partial_r \Pi_{\times}^{ijr}$, т.е. $B_k^* = \partial_k \Pi^*$, означает $\mathbf{B} = \text{grad} \Pi$.

Цепочка (21) превращается в

$$\dots (\star) Q_{\circ}^{kl}(\partial) j_{\times}^{kl}(\star) j_{\circ}^i(\partial) B_{\times}^{ij}(\star) B_{\circ}^{kl}(\partial) A_{\times}^i(\star) A_{\circ}^i(\partial) Z_{\times}^{ij}(\star) Z_{\circ}^{kl}(\partial) \psi_{\times}^i(\star) \psi_{\circ}^i(\partial) \dots \quad (24)$$

Здесь соотношение $j_{\wedge}^i = \partial_j B_{\wedge}^{ij}$ означает $\mathbf{j} = \text{rot}\mathbf{B}$. После сопряжения поле B_{\wedge}^{ij} делается замкнутым и оказывается границей магнитного потенциала: $B_{kl} = \check{\partial}_{[k} A_{l]}$ (использованы компоненты пространственного вектора \mathbf{A} и евклидова метрика). В цепочках (23), (24) Z является магнитным вектором Герца, а R и π суть гипотетические поля.

Если одному из индексов в (19)–(22) придать значение 0, но при этом полагать, что производная по времени равна нулю, $\partial_0 = 0$, то выпадает цепочка (22) и получаются формулы электростатики. В частности, цепочка (21) повторяет цепочку (17), если обозначить $j_{\wedge}^0 = \rho_{\wedge}$, $B_{\wedge}^{0i} = E_{\wedge}^i$, $A_0 = A^0 = \phi$.

5. Наполнения сингулярных границ. Три примера

5.1. Поле электрического диполя

Интересно, что из цепочки, связанной с точечным зарядом (18), легко получить цепочку полей, связанную с точечным электрическим диполем. Для этого обозначим точку, являющуюся носителем дельта функции, через x' , $\delta_{\wedge}(x, x')$, и применим ко всей цепочке (18) оператор $p^{k'} \partial_{k'}$, где $p^{k'}$ — вектор электрического момента в точке x' , а $\partial_{k'}$ — оператор дифференцирования в точке x' :

$$\dots (\star) p^{k'} \partial_{k'} \delta_{\wedge}(x, x') (\partial) p^{k'} \partial_{k'} \frac{r^i(x, x')}{4\pi r^3} (\star) p^{k'} \partial_{k'} \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3} (\partial) p^{k'} \partial_{k'} \frac{-1}{4\pi r} (\star) \dots \quad (25)$$

Здесь замкнутая сингулярная дипольная плотность заряда имеет вид $\rho_{\wedge} = p^{k'} \partial_{k'} \delta_{\wedge}(x, x')$. Её несингулярная модель представлена на рис. 10.

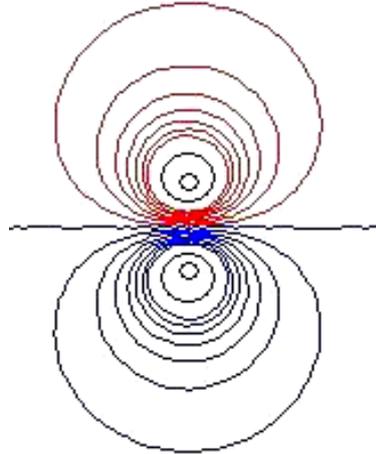


Рис. 10. Модель производной дельта-функции, умноженной на вектор \mathbf{P} , представляет скалярную плотность $\rho_{\wedge}(x)$. Показаны линии, вдоль которых ρ_{\wedge} постоянна

Наполнением этой плотности является козамкнутая напряжённость векторного поля электрического диполя E_{\wedge}^i ,

$$E_{\wedge}^i = p^{k'} \partial_{k'} \frac{r^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = -p^k \partial_k \frac{r^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = \frac{-p^i}{4\pi r^3} + \frac{3r^i p^k r_k}{4\pi r^5} \quad (26)$$

поскольку

$$\rho_{\wedge} = \partial_i E_{\times \wedge}^i(x, x'), \quad (27)$$

в силу известного выражения δ -функции

$$\delta_{\wedge}(x, x') = \partial_i \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (28)$$

Несингулярная модель поля $E_{\times \wedge}^i$ представлена на рис. 11.

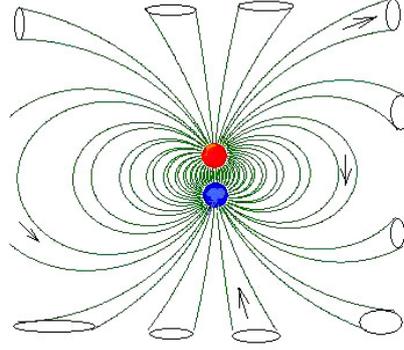


Рис. 11. Силовые трубки поля векторной плотности напряжённости поля диполя, $E_{\times \wedge}^i$. Их границей служит скалярная плотность ρ_{\wedge} рис. 10

Замкнутая напряжённость ковекторного поля диполя, сопряжённая к полю $E_{\times \wedge}^i$ (рис. 12),

$$E_i = \star E_{\times \wedge}^i = -p^k \partial_k \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (29)$$

является границей потенциала ϕ (рис. 13):

$$E_i = \partial_i \phi, \quad \phi = p^k \partial_k \frac{1}{4\pi r(x, x')} = \frac{-p^k r_k}{4\pi r^3}. \quad (30)$$

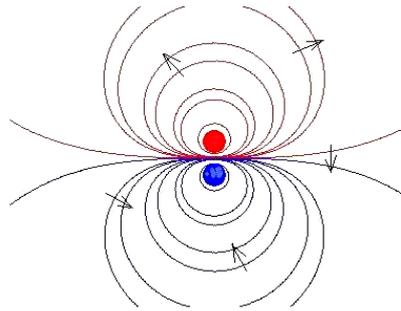


Рис. 12. Разрез замкнутых биверхностей ковекторной напряжённости поля диполя, E_i , которая сопряжена векторной плотности рис. 11

5.2. Поле элемента тока

Цепочку полей электрического диполя (31) интересно сравнить с цепочкой полей, связанных с элементом тока $I^i \delta_{\wedge}(x, x')$. По закону Био-Савара имеем для

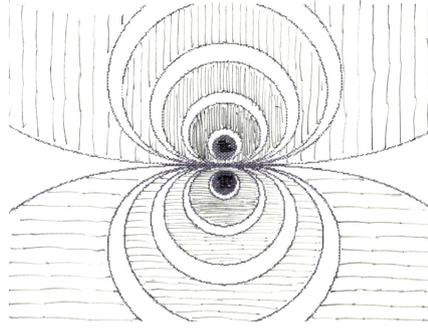


Рис. 13. Поле потенциала ϕ . Его границей является ковекторная напряжённость рис. 12. Плотность штриховки пропорциональна величине ϕ

магнитного поля

$$B_{\times \wedge}^{ik}(x, x') = \frac{2I^{[i}r^{k]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (31)$$

Граница этого магнитного поля, являющаяся замкнутым векторным полем плотности электрического тока, не равна элементу тока $I^i \delta_{\wedge}(x, x')$, а равна его замкнутой части

$$\begin{aligned} j_{\circ \wedge}^i &= \partial_k B_{\times \wedge}^{ik}(x, x') = I^i \partial_k \frac{r_{\wedge}^k(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} - I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = \\ &= I^i \delta_{\wedge}(x, x') - I^k \partial_k \frac{r_{\wedge}^i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \end{aligned} \quad (32)$$

Это замкнутое поле очень похоже на козамкнутую векторную напряжённость электрического поля диполя (26), E_{\wedge}^i , изображённую на рис. 11. Рисунки этих полей совпадают в случае действительно сингулярного элемента тока. Однако ток j_{\wedge}^i (32) замкнут, а электрическая напряжённость E_{\wedge}^i (26) козамкнута. Это отличие происходит из-за δ -функции, присутствующей в (32): последний член в (32), совпадающий с E_{\wedge}^i , сокращается с козамкнутой частью этой δ -функции. Этот феномен проиллюстрирован на рис. ??, взятом из [16].

Ток, сопряжённый с (32),

$$j_{\times}^i = I_i \delta(x, x') - I^k \partial_k \frac{r_i(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (33)$$

козамкнут. Оператор границы ∂ , применённый к этому току, обращает в ноль его замкнутую часть, совпадающую с E_{\circ}^i ,

$$-\partial_{[l} I^k \partial_k \frac{r_{i]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = 0, \quad (34)$$

и остается замкнутое сингулярное колечко с внешней ориентацией, которое можно назвать пра-током,

$$G_{li} = 2\partial_{[l} \delta(x, x') I_{i]}. \quad (35)$$

Цепочка магнитного поля, созданного сингулярным элементом тока $I^i \delta_{\wedge}(x, x')$, не входящим в эту цепочку, выглядит как (24):

$$\dots G_{\times \wedge}^{ji}(\star) G_{li}(\partial) j_{\times}^i(\star) j_{\circ \wedge}^i(\partial) B_{\times \wedge}^{ik}(\star) B_{ik} \dots \quad (36)$$

Возникновение замкнутого поля j_{\wedge}^i (32) за счет прибавления сингулярного элемента $I^i \delta_{\wedge}(x, x')$ к козамкнутому полю, совпадающему с E_i (рис. 11), проиллюстрировано на несингулярной модели в книге [16] на примере однородно намагниченного круглого цилиндра: $\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{I} + \mathbf{H}$ (см. рис. ??). На рис. ?? изображены, как это принято, силовые линии, а не трубки, как должно быть.

5.3. Поле кольцевого тока

Сингулярное колечко с внешней ориентацией (35) названо пра-током, потому что плотность тока имеет внутреннюю ориентацию, как (32). Сингулярный кольцевой ток с внутренней ориентацией, j_{\wedge}^i , являющийся аналогом электрического диполя, является границей козамкнутого магнитного поля, B_{\wedge}^{ij} , аналогичного электрическому полю E_{\wedge}^i (26). Естественно, это магнитное поле получается заменой электрического дипольного момента p^k на магнитный момент M^{ki} в формуле (26):

$$B_{\wedge}^{ij} = 2M^{k[i} \partial_{k'} \frac{r_{\wedge}^{j]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = 2M^{k[i} \partial_k \frac{r_{\wedge}^{j]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}. \quad (37)$$

Несингулярная модель этого поля изображена на рис. ?. Там же видна граница поля в виде кольцевого тока,

$$j_{\wedge}^i = \partial_j B_{\wedge}^{ij} = -M^{ki} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x') + M^{kj} \partial_k \partial_j \frac{r_{\wedge}^j(x, x')}{4\pi r^3(x, x')} = -M^{ki} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x'). \quad (38)$$

На рис. ?? изображена несингулярная модель сопряжённого замкнутого поля B_{\circ}^{ij} ,

$$B_{\circ}^{ij} = -2M_{k[i} \partial^k \frac{r_{j]}(x, x')}{4\pi r^3(x, x')}, \quad (39)$$

служащего границей векторному потенциалу A_j , который не представлен на рисунке.

При действительно сингулярном токе $j_{\wedge}^i = M^{ki} \partial_k \delta_{\wedge}(x, x')$ (38) вид поля B_{\wedge}^{ij} (рис. ??) совпадает с видом поля E_i (рис. 12) так же, как совпадает между собой вид сопряжённых к ним полей B_{ij} (рис. ??) и E_{\wedge}^i (рис. 11). Однако существует разница, которая хорошо видна на несингулярных моделях: бипервности на рис. 12 замкнуты и имеют внешнюю ориентацию, а бипервности рис. ?? опираются на токовое колечко и имеют согласованную с ним внутреннюю ориентацию; трубки на рис. 11 исходят из зарядов диполя и имеют внутреннюю ориентацию, а трубки на рис. ?? замкнуты и имеют внешнюю ориентацию. Такую же внешнюю ориентацию будут иметь бипервности поля A_j . Математически разница между полями (37) и (29) и между полями (39) и (26) обусловлена присутствием δ -функций в выражениях (37) и (39).

5.4. Оператор Лапласа–Бельтрами

Граница суммы замкнутого и козамкнутого полей равна границе козамкнутого слагаемого, потому что оператор границы элиминирует замкнутое поле,

$$\partial_i (E_{\wedge}^i + E_{\times}^i) = \partial_i E_{\wedge}^i. \quad (40)$$

Однако лапласиан, оператор второго порядка, $\nabla^2 E_{\wedge}^k = g^{ij} \nabla_i \nabla_j E_{\wedge}^k$, который использует метрику, во-первых, обрабатывает оба слагаемых такой суммы, во-вторых, должен обязательно содержать ковариантные, а не частные, производные. Как известно, [14, р. 316],

$$\nabla^2 = -\delta\partial - \partial\delta, \quad (41)$$

где δ есть кодифференциал (12), (14) (сигнатура метрического тензора g^{ij} здесь $++$). Наша цель записать члены формулы (41) в терминах сопряжения, а не оператора Ходжа, который содержится в δ .

Вследствие (14), имеем

$$\delta\delta\omega^p = \delta^{p+1}\alpha = (-1)^{p+1}\star\partial\star\alpha^{p+1} = (-1)^p\star\partial\star\delta\omega^p, \quad \partial\delta\omega^p = (-1)^p\partial\star\partial\star\omega^p. \quad (42)$$

Следовательно, для p -формы ω^p , уже независимо от сигнатуры метрического тензора, будет

$$\nabla^2\omega^p = (-1)^p(\star\partial\star\partial - \partial\star\partial\star)\omega^p, \quad (43)$$

см. также [12]. Слагаемые в формуле (43) имеют разные знаки, в отличие от (41).

Аналогично можно показать, что для контравариантной плотности валентности p , β_\wedge^p ,

$$\nabla^2\beta_\wedge^p = (-1)^{p+1}(\star\partial\star\partial - \partial\star\partial\star)\beta_\wedge^p. \quad (44)$$

Заметим здесь, что формулы (43), (44) являются выражением ковариантного оператора Лапласа над формами и коформами через *частные* производные и операцию сопряжения. Действительно, например, для скалярной функции, т. е. нуль-формы $\omega(x)$, формула (43) с учетом (8) $\partial\star\omega = 0$, даёт

$$\begin{aligned} \star\partial\star\partial\omega - \partial\star\partial\star\omega &= \star\partial\star\partial\omega = \\ &= (1/\sqrt{g_\wedge})\partial_i(g^{ij}\sqrt{g_\wedge}\partial_j\omega) = [\partial_i g^{ij} + g^{ij}(1/\sqrt{g_\wedge})\partial_i\sqrt{g_\wedge}]\partial_j\omega + g^{ij}\partial_i\partial_j\omega. \end{aligned}$$

Заменяя в первом слагаемом индекс $j \rightarrow k$ и пользуясь формулой (86.6) [17]

$$g^{ij}\Gamma_{ij}^k = -\partial_i g^{ik} - g^{ik}(1/\sqrt{g_\wedge})\partial_i\sqrt{g_\wedge},$$

получаем

$$\star\partial\star\partial\omega - \partial\star\partial\star\omega = g^{ij}(-\Gamma_{ij}^k\partial_k\omega + \partial_i\partial_j\omega) = g^{ij}\nabla_i(\nabla_j\omega) = \nabla^2\omega.$$

Отметим, что представление лапласиана в виде (43), (44) для произвольных геометрических величин не действительно.

Согласно (43), (44), лапласиан осуществляет переход вдоль цепочки полей от некоторого звена на четыре звена влево, иногда умножая на -1 . Например, для цепочки электростатики (17) или (18), для поля ϕ_\wedge , которое замкнуто, согласно (44) ($p = 0$), будет

$$\nabla^2\phi_\wedge = \partial\star\partial\star\phi_\wedge = \rho_\wedge, \quad \text{или} \quad \nabla^2\frac{-1}{4\pi r} = \partial\star\partial\star\frac{-1}{4\pi r} = \delta_\wedge(x). \quad (45)$$

Здесь знак при сдвиге по цепочке не меняется. Напротив, в цепочке магнито-статики (24), для замкнутого поля A_\wedge^i , согласно (44) ($p = 1$), знак изменяется относительно сдвига по цепочке (см. также [4, (5.31)]).

$$\nabla^2 A_\wedge^i = -\partial\star\partial\star A_\wedge^i = -j_\wedge^i. \quad (46)$$

Однако для козамкнутого поля A_\wedge^i из цепочки (??) знак не меняется. Поэтому, если векторный магнитный потенциал магнитостатики не удовлетворяет кулоновской калибровке, $\partial_i A_\wedge^i \neq 0$, т. е. содержит звенья обеих комплементарных цепочек (24), (??), $A_\wedge^i = A_{\times\wedge}^i + A_{\circ\wedge}^i$, то, согласно (44), в соответствии с [4, (5.30)],

$$\nabla^2 A_\wedge^i = \nabla^2(A_{\times\wedge}^i + A_{\circ\wedge}^i) = \star\partial\star\partial A_{\times\wedge}^i - \partial\star\partial\star A_{\circ\wedge}^i = j_{\times\wedge}^i - j_{\circ\wedge}^i = \text{grad div}\mathbf{A} - \mathbf{j}. \quad (47)$$

Для пространства-времени формула (47) выглядит

$$\nabla^2 A_\lambda^\alpha = \star \partial \star \partial A_\lambda^\alpha \partial \star \partial \star A_\lambda^\alpha = j_\lambda^\alpha - j_\circ^\alpha \quad (48)$$

(мы считаем, что в пространстве-времени $\nabla^2 = \partial_0^0 + \partial_k^k = \partial_{00} - \partial_{kk}$). Для $\alpha = 0$, согласно (48),

$$\partial_{00} A^0 - \partial_{kk} A^0 = \partial_0(\partial_0 A^0 + \partial_k A^k) - j^0, \quad \text{т. е.} \quad \partial_{kk} \phi = \partial_0 \partial_k A^k + \rho. \quad (49)$$

Это совпадает с [4, (6.10)], если учесть обозначение ϕ (3). Для $\alpha = i$, будет

$$\begin{aligned} \partial_{00} A^i - \partial_{kk} A^i &= \partial^i(\partial_0 A^0 + \partial_k A^k) - j^i, \quad \text{т. е.} \\ \partial_{00} A^i - \partial_{kk} A^i &= \partial_i(\partial_0 \phi - \partial_k A^k) + j^i. \end{aligned} \quad (50)$$

Это совпадает с [4, (6.11)] или с (47) при $\partial_0 = 0$.

При лоренцевой калибровке, именно, $\partial_\alpha A_\lambda^\alpha = \partial_0 A_\lambda^0 + \partial_i A_\lambda^i = 0$, $A_\lambda^\alpha = 0$, получается просто $\nabla^2 A_\lambda^\alpha = -j_\lambda^\alpha$, т. е.

$$\partial_{00} \phi - \partial_{kk} \phi = -\rho, \quad \partial_{00} A^i - \partial_{kk} A^i = j^i. \quad (51)$$

При кулоновской (не лоренцевой) калибровке, $\partial_k A^k = 0$, имеем вместо (49) и (50) $\partial_{kk} \phi = \rho$, и

$$\partial_{00} A^i - \partial_{kk} A^i = \partial^i \partial_0 \phi + j^i, \quad (52)$$

что совпадает с [4, (6.22)], [4, (6.24)].

Применение формулы (43) к левому концу цепочки (21) даёт интересный результат, не встречающийся в литературе:

$$\nabla^2 B_{\circ\mu\nu} = -\partial \star \partial \star B_{\circ\mu\nu} = -Q_{\circ\mu\nu} = -2\partial_{[\mu} j_{\nu]}. \quad (53)$$

В трёхмерном векторном виде этот результат выглядит

$$(\partial_{00} - \partial_{kk})\mathbf{B} = \text{rot}\mathbf{j}, \quad (\partial_{00} - \partial_{kk})\mathbf{E} = -\partial_0\mathbf{j} - \text{grad}\rho. \quad (54)$$

6. Тандемно замкнутые поля

При знакопеременном метрическом тензоре существуют *тандемно замкнутые* поля, т. е. поля, которые замкнуты и козамкнуты одновременно. Мы отмечаем такие поля парой значков $\times \circ$. Например, обычная электромагнитная плоская волна

$$\begin{aligned} B_{\times\circ\wedge}^{01} &= E^1 = e^{iz-it}, & B_{\times\circ\wedge}^{31} &= B_2 = e^{iz-it}, \\ B_{\times\circ}^{01} &= -e^{iz-it}, & B_{\times\circ}^{31} &= -B_{\times\circ}^{13} = e^{iz-it}, \end{aligned} \quad (55)$$

составляет тандемно замкнутое поле $B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta}$, $B_{\times\circ}^{\mu\nu}$, поскольку электрические и магнитные 4-токи равны нулю:

$$\partial_\beta B_{\times\circ\wedge}^{1\beta} = \partial_0 B_{\times\circ\wedge}^{10} + \partial_3 B_{\times\circ\wedge}^{13} = 0, \quad \partial_{[\lambda} B_{\times\circ}^{\mu\nu]} = \partial_3 B_{\times\circ}^{10} + \partial_0 B_{\times\circ}^{31} = 0. \quad (56)$$

В этом случае оба поля тандема замкнуты. Мы называем такой тандем *концевым* тандемом, потому что цепочка кончается слева таким тандемом. Очевидно, концевой тандем служит концом двух (комплементарных) цепочек. Например, (56) означает (ср. (20), (21)),

$$0(\partial) B_{\times\circ}^{\mu\nu}(\star) B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) \Pi_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) \Pi_{\circ\lambda\mu\nu}(\partial) Z_{\times\wedge}^{\mu\nu}(\star) Z_{\circ\wedge}^{\alpha\beta}(\partial) R_{\times\wedge}^{\alpha\beta\gamma}(\star) R_{\circ\lambda\mu\nu}(\partial) \dots \quad (57)$$

$$0(\partial) B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta}(\star) B_{\times\circ}^{\mu\nu}(\partial) A_{\times\wedge}^\alpha(\star) A_{\circ\lambda}^\alpha(\partial) Z_{\times\wedge}^{\alpha\beta}(\star) Z_{\circ\mu\nu}(\partial) \Phi_{\times\wedge}^\alpha(\star) \Phi_{\circ\lambda}^\alpha(\partial) \dots \quad (58)$$

В цепочке (58) электромагнитное поле $B_{\times\circ\wedge}^{\mu\nu}$ является границей магнитного векторного потенциала A_{\times}^{ν} : $B_{\times\circ\wedge}^{\mu\nu} = 2\partial_{[\mu}A_{\nu]}$, $A_{\times}^1 = -A_{\circ\wedge}^1 = -ie^{iz-it}$, однако сопряжённое с ним электромагнитное поле $B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta}$ в цепочке (57) является границей электрического три-векторного потенциала $\Pi_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta\gamma}$: $B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta} = \partial_{\gamma}\Pi_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta\gamma}$, $\Pi_{\times\circ\wedge}^{103} = \Pi_{\circ\wedge}^{103} = ie^{iz-it}$. Несколько следующих звеньев цепочек выглядят так:

$$Z_{\times\circ\wedge}^{10} = -Z_{\circ\wedge}^{10} = \frac{1+i(t+z)}{4}e^{iz-it}, \quad Z_{\times\circ\wedge}^{13} = -Z_{\circ\wedge}^{13} = \frac{1-i(t+z)}{4}e^{iz-it}, \quad (59)$$

$$R_{\times\circ\wedge}^{103} = -R_{\circ\wedge}^{103} = -\frac{(t+z)}{4}e^{iz-it},$$

$$Z_{\times\circ\wedge}^{10} = -Z_{\circ\wedge}^{10} = \frac{-1+i(t+z)}{4}e^{iz-it}, \quad Z_{\times\circ\wedge}^{13} = -Z_{\circ\wedge}^{13} = \frac{1+i(t+z)}{4}e^{iz-it}, \quad (60)$$

$$C_{\times}^1 = -C_{\circ\wedge}^1 = -\frac{(t+z)}{4}e^{iz-it},$$

Поскольку лапласиан осуществляет сдвиг вдоль цепочки на четыре звена влево, мы имеем, согласно (57) и (44),

$$B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta} = \partial \star \partial \star Z_{\circ\wedge}^{\alpha\beta} = \nabla^2 Z_{\circ\wedge}^{\alpha\beta}. \quad (61)$$

Но то же поле $B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta}$, согласно (58) и (44), равно

$$B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta} = \star \partial \star \partial Z_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta} = -\nabla^2 Z_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta}. \quad (62)$$

Тут мы получаем интересный общий вывод:

Сумма однородных членов комплементарных цепочек является гармоническим полем, если сдвиг на четыре звена влево приводит к концевому тандему. (63)

Действительно,

$$\nabla^2 Z_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta} = \nabla^2 (Z_{\circ\wedge}^{\alpha\beta} + Z_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta}) = B_{\circ\wedge}^{\alpha\beta} - B_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta} = 0. \quad (64)$$

Между прочим, мы можем рассматривать гармоническое поле $Z_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta}$ из (59), (60), как некую плоско поляризованную электромагнитную волну, поскольку она удовлетворяет однородному волновому уравнению (64). По аналогии с (55) мы можем считать

$$Z_{\times\circ\wedge}^{01} = Z_{\times\circ\wedge}^{01} + Z_{\circ\wedge}^{01} = E^1 = \frac{1}{2}e^{iz-it}, \quad Z_{\times\circ\wedge}^{31} = Z_{\times\circ\wedge}^{31} + Z_{\circ\wedge}^{31} = B_2 = -\frac{1}{2}e^{iz-it} \quad (65)$$

электрическим и магнитным полем этой волны, используя формулы (59), (60). Но это очень странная волна. Вектор Пойнтинга, $\mathbf{S} = (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/2$, имеет z -компоненту, направленную противоположно направлению движения волны: $S_z = -1/8$, и волна сопровождается электрическим $j_{\times\circ\wedge}^{\alpha}$ и магнитным $J_{\lambda\mu\nu}$ токами, роль которых играют обычные магнитный и электрический векторные потенциалы:

$$j_{\times\circ\wedge}^{\alpha} = \partial_{\beta} Z_{\times\circ\wedge}^{\alpha\beta} = A_{\times\circ\wedge}^{\alpha}, \quad J_{\lambda\mu\nu} = 3\partial_{[\lambda} Z_{\times\circ\wedge}^{\mu\nu]} = \Pi_{\circ\wedge}^{\lambda\mu\nu}. \quad (66)$$

Совсем простой пример концевой тандема, приведен в [2]. При этом там использован знакопостоянный метрический тензор. Зато там поля растут на бесконечности.

7. Заключение

Описание электромагнитных полей, представленное в данной статье, возможно, более соответствует природе электромагнетизма, чем стандартное описание. Использование понятий сопряжения и границ полей выявляет естественные связи и различия между различными полями и придает им необычную наглядность тем более, что источники полей оказываются границами многообразий, изображающих эти поля. Идея применения дифференциальных форм при изложении электромагнетизма, по-видимому, впервые действительно реализована и упростила изложение.

Литература

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. — М.: Наука, 1996. — Т. 3.
2. *Храпко Р. И.* Разложение Гельмгольца, etc. // Труды МАИ. — 2005. — № 19. — <http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num19/article9/author.htm>.
3. *Ohanian H. C.* Physics. — N.Y.: W. W. Norton, 1985.
4. *Jackson J. D.* Classical Electrodynamics. — John Wiley & Sons, Inc., 1999.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1984.
6. *Schouten J. A.* Tensor Analysis for Physicists. — Oxford: Clarendon, 1951.
7. *Схоутен Я. А.* Тензорный анализ для физиков. — М.: Наука, 1965.
8. *Napolitano J., Lichtenstein R.* Answer to Question № 55 Are the pictorial examples that distinguish covariant and contravariant vectors? // American J. Physics. — 1997. — Vol. 65. — P. 1037.
9. *Cartan H.* Calcul Differential. Formes Differentielles. — Paris: Herman, 1967.
10. *Карпан А.* Дифференциальное исчисление, Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.
11. *Flanders H.* Differential Forms. — New York: Academic, 1963.
12. *Khrapko R. I.* Violation of the gauge equivalence. — <http://arXiv.org/abs/physics/0105031>.
13. *Храпко Р. И.* Силовые трубки и биповерхности в электромагнетизме // Труды МАИ. — 2001. — № 4. — <http://www.mai.ru/science/trudy/articles/num4/article7/author.htm>.
14. *Von Westenholz C.* Differential Forms in Mathematical Physics. — North Holland, 1978.
15. *Терлецкий Я. П., Рыбаков Ю. П.* Электродинамика. — М.: Высшая школа, 1990.
16. *Abraham M., Becker R.* The Classical Theory of Electricity and Magnetism. — N. Y.: Hafner.
17. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля. — М.: Наука, 1973.

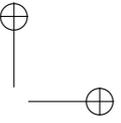
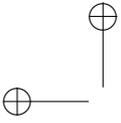
UDC 537.86

The Evident Images of Electromagnetic Fields, etc

R. I. Khrapko

*Department of Physics
Moscow Aviation Institute
4, Volokolamskoe ave., Moscow, 125993, Russia*

A consistent use of the exterior differential forms in the electromagnetism shows that fields of electromagnetism are geometrical quantities of two different types: differential forms and contravariant (antisymmetric) tensor densities. These types are connected with each other by a specific operation, named the conjugation, which is a part of the Hodge operation. Field tubes and families of bisurfaces depict electromagnetic fields. The conjugation allows a many-fold differentiation of the fields and leads to field chains. The Helmholtz's decomposition of a field is a decomposition into a closed part and a closed after conjugation part of the field. Chains of fields of electric and magnetic dipoles are considered in detail. Concept of boundary



of a field is used widely. Laplacian is represented in terms of the conjugation, and its action on isolated chains is considered. A sufficient condition of harmonicity of a field is found.

Key words and phrases: Differential forms, Helmholtz decomposition, Hodge operation, Laplacian.

