"ЖЭТФ"
№9а. 25/02 1999 г.

Спин и орбитальный момент - это одно и то же?

Р.И.Храпко

Московский авиационный институт, 125871, Москва, Россия

Н-О

Вопреки общепринятому мнению утверждается, что плоская электромагнитная волна круговой поляризации содержит спиновый момент импульса, а пучок таких волн содержит кроме того еще и, равный спиновому, орбитальный момент.

Общепризнанным является странное утверждение, что плоская электромагнитная волна круговой поляризации не содержит никакого момента импульса. Это утверждение восходит, видимо, к работе Шапочникова [1] (цитировано по [2]). Оно четко сформулировано, например, в [3].

Следует признать, однако, что для такой точки зрения имеется определенное психологическое основание: в плоской волне круговой поляризации ничего не крутится, она представляет собой винтовую поверхность, составленную из векторов **E** или **B** (вернее, она состоит из элементов такой поверхности) и движется поступательно. Невозможно вообразить, что на самом деле такая волна разбита на кванты, каждый из которых несет спиновый момент импульса.

Между тем Р.Фейнман наглядно показывает [4, с.385], как при поглощении такой волны вращающимися электронами среды из волны поступают совместно момент импульса и энергия, пропорциональные поглощающей площади и находящиеся в соотношении $1/\omega$.

Тем не менее, согласно общепринятой точке зрения, только пучок электромагнитных волн с конечным поперечным сечением обладает моментом импульса, который локализован в районе боковой границы пучка, там, где электромагнитные поля имеют продольные составляющие, а вектор Пойнтинга, соответственно, имеет составляющую, перпендикулярную направлению распространения волны. С целью подтвердить такое мнение в монографии [5, с.228] приведено приближенное выражение для подобного

Спин и орбитальный момент - это одно и то же?

Р. И. Храпко*

Московский авиационный институт, 125993, Москва, Россия

25 февраля 1999

Аннотация

Вопреки общепринятому мнению, утверждается, что плоская электромагнитная волна круговой поляризации содержит спиновый момент импульса, а луч круговой поляризации содержит, кроме того, еще и, равный спиновому, орбитальный момент импульса.

Общепризнанным является странное утверждение, что плоская электромагнитная волна круговой поляризации не содержит никакого момента импульса. Это утверждение восходит, видимо, к работе Шапочникова [1]. Оно четко сформулировано, в частности, в [2, 3, 4].

Следует признать, однако, что для такой точки зрения имеется определенное психологическое основание: в плоской волне круговой поляризации ничего не крутится, она представляет собой винтовую поверхность, составленную из векторов **E** и **B** (вернее, она состоит из элементов такой поверхности) и движется поступательно. Невозможно вообразить, что на самом деле такая волна разбита на кванты, каждый из которых несет спиновый момент импульса.

Между тем Фейнман наглядно показывает [5], как при поглощении такой волны вращающимися электронами среды из волны поступают совместно момент импульса и энергия, пропорциональные площади поглощения и находящиеся в соотношении $1/\omega$.

Тем не менее, согласно общепринятой точке зрения, только луч с конечным поперечным сечением обладает моментом импульса, который локализован в районе боковой границы луча, там, где электромагнитные поля имеют продольные составляющие, а вектор Пойнтинга, соответственно, имеет составляющую, перпендикулярную направлению распространения луча. С целью подтвердить это мнение, в [6]приведено приближенное выражение для такого луча. Мы выпишем его для луча правой круговой поляризации (электромагнитные поля имеют форму левого винта), полагая $c = 1$ и отмечая комплексные вектора значком breve.

$$\breve{\mathbf{E}}(x,y,z) = e^{i\omega(z-t)}[\mathbf{x} + i\mathbf{y} + \mathbf{z}(i\partial_x - \partial_y)]E_0/\omega, \quad \breve{\mathbf{B}} = -i\breve{\mathbf{E}}. \tag{1}$$

*Email addresses: khrapko_ri@mai.ru, khrapko_ri@hotmail.com

Здесь $E_0(x,y)$ - электрическое поле, постоянное на территории луча и равное нулю снаружи.

Прямое вычисление дает компоненты объемной плотности момента импульса электромагнитного поля относительно точки, лежащей на оси z:

$$d\mathbf{L}/dV = [\mathbf{r}[\mathbf{EB}]] = \mathbf{x}(z\partial_x E_0^2/2\omega + yE_0^2) + \mathbf{y}(z\partial_y E_0^2/2\omega - xE_0^2) - \mathbf{z}(x\partial_x E_0^2 + y\partial_y E_0^2)/2\omega. \quad (2)$$

Заметим, что при вычислении следует опускать вторые производные $\partial_{xy}E_0, \ldots$ В этом смысл приближения формулы (1).

Видно, что $z-$компонента объемной плотности момента импульса отлична от нуля только вблизи поверхности луча за счет производных электромагнитного поля.
$z-$компонента равна нулю внутри луча. Интегрирование выражения (2) дает компоненты момента импульса некоторого отрезка луча:

$$L_x = L_y = 0, \qquad L_z = \int E_0^2 dV/\omega. \quad (3)$$

При сопоставлении найденного момента импульса (3) с энергией того же отрезка луча, $W = \int E_0^2 dV$, делается вывод, что величина (3) является спином луча, на том основании, что отношение $L/W = 1/\omega$ оказывается таким же, как отношение спина к энергии фотона.

На наш взгляд, этот вывод неверен. Момент импульса (3) является на самом деле орбитальным моментом импульса, который обязан своим происхождением массе-энергии, циркулирующей вблизи поверхности луча. Спин же содержится во всем объеме луча и при поглощении луча поступает на любой элемент мишени в количестве, пропорциональном площади этого элемента. Вычисление (3) никак не затрагивает спин, а соотношение $L/W = 1/\omega$ следует рассматривать как совпадение, возможно, не случайное.

Чтобы учесть спиновый момент импульса S^{ij}, необходимо рассмотреть объемную плотность спина, для обозначения которой мы будем использовать букву Υ (ипсилон). Каноническое выражение тензорной плотности 4-спина [7], $\underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\mu\nu} = -2A^{[\alpha}F^{\mu]\nu}$, дает для объемной плотности спина выражение $\underset{c}{\Upsilon}^{ij0} = 2E^{[i}A^{j]}$. Интегрирование этого выражения по отрезку луча (1) (после предварительного вычисления векторного потенциала $\mathbf{A}$) приводит к той же величине (3):

$$S_z = S^{xy} = \int 2E^{[x}A^{y]}dV = \int E_0^2 dV/\omega.$$

Поэтому полный момент импульса, содержащийся в рассмотренном луче, вдвое больше количества (3): $J_z = L_z + S_z$. Представляется очевидным, что кванты, поглощаемые серединой мишени, приносят туда спиновый момент импульса помимо того момента импульса, который достается периферии мишени от массы, вращающейся на поверхности луча.

Какова дальнейшая судьба поглощенного спинового момента импульса?
Энергия электромагнитной волны, поглощаемая мишенью, $-\mathrm{div}\,[\mathbf{EB}]$, если она не аккумулируется в веществе локально за счет, например теплоемкости, вызывает тепловой

поток и выносится на границу мишени. Аналогично, спин, поглощаемый мишенью, $-\partial_k \Upsilon^{ijk}$, если он не аккумулируется в атомных структурах и не вызывает углового ускорения, создает механические напряжения в материале, характеризующиеся антисимметричной компонентой тензора напряжений материала: $2T^{[ij]} = \partial_k \Upsilon^{ijk}$. В этом случае поглощенный спин, в конечном счете, окажется приложенным к границе мишени в виде момента силы.

$$\tau^{ij} = \oint_{\partial V} 2r^{[i}T^{j]k} da_k = \int_V -2T^{[ij]} dV = -\int_V \partial_k \Upsilon^{ijk} dV.$$

Слева произведено интегрирование по некоторой замкнутой поверхности ∂V, охватывающей область V, в которой поглощается спин. Механизм передачи спинового момента импульса к границе в случае плазмы, по сути, описан в статье [3], хотя автор интерпретирует свой результат прямо противоположным образом.

Если бы удалось создать мишень, не аккумулирующую спин локально и разделенную на две концентрические части, внешнюю и внутреннюю, которые могут вращаться независимо, то такая мишень могла бы подтвердить высказанную идею об удвоении момента импульса: внешняя часть будет принимать орбитальный момент, внутренняя - спин. Впрочем, количественный эксперимент с поглощающей мишенью, не аккумулирующей спин, может подтвердить удвоение момента и без разделения мишени.

Следует заметить, что неучет спина при обычном подходе, возможно, связан с тем, что прямое вычисление объемной плотности момента импульса с последующим интегрированием ее, выполненное выше, традиционно заменяется неким преобразованием. Это преобразование выполнено впервые, видимо, Гамблетом [8] и затем неоднократно повторено [9, 10]. Воспроизведем его с неизбежными вольностями в обозначениях.

$$\int [\mathbf{r}[\mathbf{E}\mathbf{B}]] dV = \int [\mathbf{r}[\mathbf{E}[\nabla\mathbf{A}]]] dV = 2\int (r^{[k}E^i\partial^{j]}A_i - r^{[k}E^i\partial_i A^{j]}) dV$$

$$= 2\int r^{[k}E^i\partial^{j]}A_i dV - 2\int r^{[k}\partial_i(E^i A^{j]}) dV = 2\int r^{[k}E^i\partial^{j]}A_i dV + \int [\mathbf{E}\mathbf{A}] dV.$$

Легко убедиться, что первое слагаемое в конце - это момент продольной составляющей импульса. Оно равно нулю, если момент вычисляется относительно точки, расположенной на оси симметрии луча. Второе слагаемое, выражающее орбитальный момент импульса, равный по величине спиновому моменту, естественно, оказывается представленным через спиновую плотность $[\mathbf{E}\mathbf{A}]$. Это, видимо, и является причиной того, что второе слагаемое интерпретируется как спин. В действительности, преобразование Гамблета доказывает лишь равенство орбитального и спинового моментов импульса луча круговой поляризации.

Следует отметить, что канонический тензор спина $\underset{c}{\Upsilon}^{\alpha\mu\nu} = -2A^{[\alpha}F^{\mu]\nu}$, позволяющий правильно подсчитать плотность спина в плоской волне, в целом неудовлетворителен. В частности, он дает абсурдное ненулевое значение потока спина поперек направления распространения волны, например, вдоль оси x :

$$\underset{c}{\Upsilon}^{yzx} = -2A^{[y}F^{z]x} = A^y B_y.$$

Так что, актуален вопрос об адекватном выражении для тензора спина. Такое выражение, видимо, не может быть получено с помощью канонического формализма, а должно быть выбрано из соображений соответствия с опытом.

Литература

[1] *Shapochnikov K.*// An. D. Phys. 1914, v. 43, .473.

[2] *Вульфсон К. С.* О моменте количества движения электромагнитных волн.// УФН **152**, 667 (1987)

[3] *Соколов И.* Момент импульса электромагнитной волны, эффект Садовского и генерация магнитных полей в плазме.// УФН 1991, т. 161, N 10, с. 175.

[4] *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения// М.: ИЛ, 1956, с.451.

[5] *Фейнман Р, Лейтон Р,. Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике, Вып. 8,9// М.: Мир, 1978

[6] *Джексон Дж.* Классическая электродинамика// М.: Мир, 1965 с. 228

[7] *Боголюбов Н. Н.и Ширков Д. В.* Ввдение в теорию квантованных полей// М.: ГИТТЛ, 1957, с.23

[8] *Humblet J.*// Physica 1943, v. 10, 585.

[9] *Ohanian H. C.* What is spin?// Amer. J. Phys. 1986, v. 54, 500.

[10] *Crichton J. et al.*// GRG 1990, v. 22, 61.